

附 录

附录 A: 投资者最优化问题求解:

①化简 $E_i(U_{i,T})$

对于投资者 1 和 2, 记 $z_i^C + z_i^P = z_i^{C*}$, T 时刻财富 $W_{i,T}$ 可改写为:

$$W_{i,T} = \rho_i S_T R^f + x_i (S_T - S_T R^f) + z_i^{C*} ((S_T - K)^+ + \varepsilon_T^C - C_T R^f) + z_i^P (K - S_T + \varepsilon_T^P - \varepsilon_T^C - P_T R^f + C_T R^f) \text{ 代入效用函数中可得,}$$

$$E_i(U_{i,T}) = -E_i\left(e^{-\frac{1}{\tau}W_{i,T}}\right) = -$$

$$E_i\left(e^{-\frac{1}{\tau}\left\{[x_i S_T + z_i^{C*}(S_T - K)^+ - z_i^P S_T] + [z_i^{C*}\varepsilon_T^C - z_i^P(\varepsilon_T^C - \varepsilon_T^P)] + [\rho_i S_T R^f - x_i S_T R^f - z_i^{C*}C_T R^f + z_i^P(C_T R^f - P_T R^f + K)]\right\}}\right) = -$$

$$e^{-\frac{1}{\tau}[\rho_i S_T R^f - x_i S_T R^f - z_i^{C*}C_T R^f + z_i^P(C_T R^f - P_T R^f + K)] + \frac{1}{2\tau^2}[(z_i^{C*} - z_i^P)^2 \delta + z_i^{P^2} \delta]} \times E_i\left[e^{-\frac{1}{\tau}(x_i S_T + z_i^{C*}(S_T - K)^+ - z_i^P S_T)}\right],$$

$$\text{记 } A_{i1} = -e^{-\frac{1}{\tau}[\rho_i S_T R^f - x_i S_T R^f - z_i^{C*}C_T R^f + z_i^P(C_T R^f - P_T R^f + K)] + \frac{1}{2\tau^2}[(z_i^{C*} - z_i^P)^2 \delta + z_i^{P^2} \delta]},$$

$$\text{记 } d_{i1} = \frac{K - [\mu_i - \frac{\nu}{\tau}(x_i - z_i^P)]}{\sqrt{\nu}}, \quad \text{记 } d_{i2} = \frac{K - [\mu_i - \frac{\nu}{\tau}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P)]}{\sqrt{\nu}},$$

$$\text{记 } A_{i2} = e^{-\frac{\mu_i}{\tau}(x_i - z_i^P) + \frac{\nu}{2\tau^2}(x_i - z_i^P)^2} \times \Phi(d_{i1}),$$

$$\text{记 } A_{i3} = e^{\frac{z_i^{C*}}{\tau}K - \frac{\mu_i}{\tau}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P) + \frac{\nu}{2\tau^2}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P)^2} \times [1 - \Phi(d_{i2})], \text{ 最终将 } E_i(U_{i,T}) \text{ 化简为:}$$

$$E_i(U_{i,T})$$

$$= A_{i1} \times \left[\int_{-\infty}^K e^{-\frac{x_i - z_i^P}{\tau}S_T} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-\frac{(S_T - \mu_i)^2}{2\nu}} dS_T + e^{\frac{z_i^{C*}}{\tau}K} \int_K^{+\infty} e^{-\frac{x_i + z_i^{C*} - z_i^P}{\tau}S_T} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-\frac{(S_T - \mu_i)^2}{2\nu}} dS_T \right]$$

$$= A_{i1} \times \left[e^{-\frac{\mu_i}{\tau}(x_i - z_i^P) + \frac{\nu}{2\tau^2}(x_i - z_i^P)^2} \times \Phi\left(\frac{K - [\mu_i - \frac{\nu}{\tau}(x_i - z_i^P)]}{\sqrt{\nu}}\right) + e^{\frac{z_i^{C*}}{\tau}K - \frac{\mu_i}{\tau}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P) + \frac{\nu}{2\tau^2}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P)^2} \times \left[1 - \Phi\left(\frac{K - [\mu_i - \frac{\nu}{\tau}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P)]}{\sqrt{\nu}}\right)\right] \right]$$

$$= A_{i1}(A_{i2} + A_{i3})$$

对于投资者 3, $E_3(U_{3,T})$ 将化简为

$$E_3(U_{3,T}) = -E\left\{e^{-\frac{1}{\tau}[x_3(S_T - S_T R^f) + \rho_3 S_T R^f]}\right\} = -e^{-\frac{1}{\tau}[x_3(\mu_3 - S_T R^f) + \rho_3 S_T R^f]} \times e^{\frac{1}{2\tau^2}x_3^2 \nu}$$

②计算 $E_i(U_{i,T})$ 对 x_i 、 z_i^{C*} 、 z_i^P 的偏导数

$$\text{记 } A_{i4} = -\frac{\mu_i}{\tau} + \frac{\nu}{\tau^2}(x_i - z_i^P) + \frac{\sqrt{\nu}\phi(d_{i1})}{\tau\Phi(d_{i1})},$$

$$\text{记 } A_{i5} = -\frac{\mu_i}{\tau} + \frac{\nu}{\tau^2}(x_i + z_i^{C*} - z_i^P) - \frac{\sqrt{\nu}\phi(d_{i2})}{\tau[1 - \Phi(d_{i2})]}, \text{ 分别计算 } E_i(U_{i,T}) \text{ 对 } x_i、z_i^{C*}、z_i^P \text{ 的偏导数, 最终}$$

可得:

$$E_i(U_{i,T}) \text{ 对 } x_i \text{ 的偏导数, } i=1, 2, 3:$$

$$\frac{\partial E_1(U_{1,T})}{\partial x_1} = \frac{S_T R^f}{\tau} \times A_{11}(A_{12} + A_{13}) + A_{11} \times (A_{14}A_{12} + A_{15}A_{13})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_2(U_{2,T})}{\partial x_2} &= \frac{S_t R^f}{\tau} \times A_{21}(A_{22} + A_{23}) + A_{21} \times (A_{24}A_{22} + A_{25}A_{23}) \\ \frac{\partial E_3(U_{3,T})}{\partial x_3} &= E_3(U_{3,T}) \times \left(-\frac{\mu_3 - S_t R^f}{\tau} + \frac{x_3}{\tau^2} \nu \right) \\ E_i(U_{i,T}) &\text{对 } z_i^{C*}, z_i^P \text{ 的偏导数, } i=1, 2: \\ \frac{\partial E_i(U_{i,T})}{\partial z_i^{C*}} &= \left(\frac{C_t R^f}{\tau} + \frac{z_i^{C*} - z_i^P}{\tau^2} \delta \right) \times A_{i1}(A_{i2} + A_{i3}) + A_{i1} \times \left[\left(\frac{K}{\tau} + A_{i5} \right) A_{i3} \right] \\ \frac{\partial E_i(U_{i,T})}{\partial z_i^P} &= \left[-\frac{C_t R^f - P_t R^f + K}{\tau} - \frac{z_i^{C*} - z_i^P}{\tau^2} \delta + \frac{z_i^P}{\tau^2} \delta \right] \times A_{i1}(A_{i2} + A_{i3}) - A_{i1} \\ &\quad \times (A_{i4}A_{i2} + A_{i5}A_{i3})\end{aligned}$$

③计算②中各拉格朗日函数对应的一阶条件

对于投资者 1, 一阶条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial E_1(U_{1,T})}{\partial x_1} + \lambda_{11} - \lambda_{12} \\ \frac{\partial L_1}{\partial z_1^{C*}} = \frac{\partial E_1(U_{1,T})}{\partial z_1^{C*}}, \frac{\partial L_1}{\partial z_1^P} = \frac{\partial E_1(U_{1,T})}{\partial z_1^P} \\ \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{11}} = x_1 - \eta_1 \rho_1 \geq 0, \lambda_{11} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{11}(x_1 - \eta_1 \rho_1) = 0 \\ \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{12}} = Q - \eta_3 \rho_3 + \gamma - x_1 \geq 0, \lambda_{12} \geq 0, \text{ 且 } \lambda_{12}(Q - \eta_3 \rho_3 + \gamma - x_1) = 0 \end{cases}$$

对于投资者 2, 一阶条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = \frac{\partial E_2(U_{2,T})}{\partial x_2} - \lambda_{21} + \lambda_{22} \\ \frac{\partial L_2}{\partial z_2^{C*}} = \frac{\partial E_2(U_{2,T})}{\partial z_2^{C*}}, \frac{\partial L_2}{\partial z_2^P} = \frac{\partial E_2(U_{2,T})}{\partial z_2^P} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{21}} = Q - \eta_1 \rho_1 - \eta_3 \rho_3 - x_2 \geq 0, \lambda_{21} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{21}(Q - \eta_1 \rho_1 - \eta_3 \rho_3 - x_2) = 0 \\ \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{22}} = x_2 + \gamma \geq 0, \lambda_{22} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{22}(x_2 + \gamma) = 0 \end{cases}$$

对于投资者 3, 一阶条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial x_3} = \frac{\partial E_3(U_{3,T})}{\partial x_3} + \lambda_{31} - \lambda_{32} \\ \frac{\partial L_3}{\partial \lambda_{31}} = x_3 - \eta_3 \rho_3 \geq 0, \lambda_{31} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{31}(x_3 - \eta_3 \rho_3) = 0 \\ \frac{\partial L_3}{\partial \lambda_{32}} = Q - \eta_1 \rho_1 + \gamma - x_3 \geq 0, \lambda_{32} \geq 0, \text{ 且 } \lambda_{32}(Q - \eta_1 \rho_1 + \gamma - x_3) = 0 \end{cases}$$

每组一阶条件中关于拉格朗日乘子 λ_{ij} 的部分即为库恩塔克条件。

④一阶条件的进一步整理

参考 Qin (2013)¹ 的求解思路, 尽管 $E_i(U_{i,T})$ 对 x_i 、 z_i^{C*} 、 z_i^P 的偏导数中存在大量非线性关系, 但资产价格 S_t 、 C_t 、 P_t 均可以单独分离, 进而减少求解的未知数。

进一步, 与各投资者一阶条件中的库恩塔克条件、市场出清条件共同联立, 即可得到待

¹ Qin Z., "Speculations in option markets enhance allocation efficiency with heterogeneous beliefs and learning", *Journal of Banking & Finance*, 2013, 37(12): 4675-4694.

求解的方程组 (14)。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t R^f = -\frac{A_{14}A_{12}+A_{15}A_{13}}{A_{12}+A_{13}}\tau - \frac{\lambda_{11}-\lambda_{12}}{E_1(U_{1,T})}\tau \\ S_t R^f = -\frac{A_{24}A_{22}+A_{25}A_{23}}{A_{22}+A_{23}}\tau - \frac{-\lambda_{21}+\lambda_{22}}{E_2(U_{2,T})}\tau \\ S_t R^f = \mu_3 - \frac{x_3}{\tau_3}\nu - \frac{\lambda_{31}-\lambda_{32}}{E_3(U_{3,T})}\tau \\ C_t R^f = -\frac{\left(\frac{K}{\tau_1}+A_{15}\right)A_{13}}{A_{12}+A_{13}}\tau - \frac{z_1^C - z_1^P}{\tau}\delta \\ C_t R^f = -\frac{\left(\frac{K}{\tau_2}+A_{25}\right)A_{23}}{A_{22}+A_{23}}\tau - \frac{z_2^C - z_2^P}{\tau}\delta \\ P_t R^f = -\frac{\frac{K}{\tau_1}A_{13}-A_{14}A_{12}}{A_{12}+A_{13}}\tau - \frac{z_1^P}{\tau}\delta + K \\ P_t R^f = -\frac{\frac{K}{\tau_2}A_{23}-A_{24}A_{22}}{A_{22}+A_{23}}\tau - \frac{z_2^P}{\tau}\delta + K \\ x_1 - \eta_1\rho_1 \geq 0, \lambda_{11} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{11}(x_1 - \eta_1\rho_1) = 0 \\ Q + \gamma - x_1 \geq 0, \lambda_{12} \geq 0, \text{ 且 } \lambda_{12}(Q + \gamma - x_1) = 0 \\ Q - \eta_1\rho_1 - x_2 \geq 0, \lambda_{21} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{21}(Q - \eta_1\rho_1 - x_2) = 0 \\ x_2 + \gamma \geq 0, \lambda_{22} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{22}(x_2 + \gamma) = 0 \\ x_3 \geq 0, \lambda_{31} \geq 0 \text{ 且 } \lambda_{31}x_3 = 0 \\ Q - \eta_1\rho_1 + \gamma - x_3 \geq 0, \lambda_{32} \geq 0, \text{ 且 } \lambda_{32}(Q - \eta_1\rho_1 + \gamma - x_3) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = Q, \quad z_1^C + z_2^C = 0, \quad z_1^P + z_2^P = 0 \end{array} \right. \quad (*)$$

由于本文的效用函数为负指数效用, 且约束条件均为线性函数, 因此经过一阶条件为 0 得到的解一定为目标最大化解 (蒋中一等, 2006)²。

方程组 (*) 中含有众多不等式方程, 进一步求解需要逐步试验 λ_{ij} 可能的取值 (如约束端点值)。求解发现共有 7 类可能的均衡解, 汇总如附表 1。

附表 1 7 类可能均衡解汇总

序号	x_1	x_2	x_3	解的类型
1	$Q + \gamma$	$-\gamma$	0	边界解
2	$\eta_1\rho_1$	$Q - \eta_1\rho_1$	0	边界解
3	$(\eta_1\rho_1, Q + \gamma)$	$(-\gamma, Q - \eta_1\rho_1)$	0	内部解
4	$\eta_1\rho_1$	$-\gamma$	$Q - \eta_1\rho_1 + \gamma$	边界解
5	$\eta_1\rho_1$	$(-\gamma, Q - \eta_1\rho_1)$	$(0, Q - \eta_1\rho_1 + \gamma)$	内部解
6	$(\eta_1\rho_1, Q + \gamma)$	$-\gamma$	$(0, Q - \eta_1\rho_1 + \gamma)$	内部解
7	$(\eta_1\rho_1, Q + \gamma)$	$(-\gamma, Q - \eta_1\rho_1)$	$(0, Q - \eta_1\rho_1 + \gamma)$	内部解

前文假设模型中存在散户与机构投资者, 由于机构投资者在专业性、信息获取与分析、可参与市场数量等方面的优势, 因此本文首先假设代表性投资者 3 (散户) 完全不拥有任何

² 蒋中一、凯尔文·温赖特, 《数理经济学的基本方法》, 第 4 版, 刘学、顾佳峰译, 北京: 北京大学出版社, 2006 年。

市场势力,即当均衡解为附表 1 中可能的解 1、2、4 时,现货均衡价格完全由代表性投资者 1 和 2 (机构) 决定,投资者 3 是价格接受者。其次,直观上投资者的市场势力常与投资者资产数量的某种指标挂钩,如禀赋、交易量以及持仓量等,这其中,由于持仓量不仅能反映出投资者最优的风险暴露大小、进而反映出其乐观悲观程度,同时在本文的设定下,投资者 1 和 2 的现货持仓量与最大融券量 γ 以及可出售比例 $(1-\eta_1)$ 有关,对监管约束的影响力(即对 γ 与 $(1-\eta_1)$ 的影响力)更能够反映出投资者的市场势力情况。因此本文假设投资者 1 和 2 的市场势力由其现货持有量体现,均衡价格的决定将取决于二者现货持有量绝对值的比例(由于投资者 2 可能持有现货空方头寸,因此取现货持有量绝对值)。

⑤ 外生参数设定

尽管上述 7 类可能的解在求解时已经不含有任何不等式方程,但由于待求解的方程组中存在大量的非线性关系,难以求出解析解,因此后文中将采用数值解图示的方法进行求解分析,外生参数取值汇总在附表 2 中。

附表 2 数值求解中外生参数取值

外生参数	数值	外生参数	数值
ρ_1	0.5	γ	0.2
η_1	0.5	Q	1
ρ_2	0.2	δ	0.005
ρ_3	0.3	K	1
ν	0.05	R^f	1.03
τ	1.25		

附录 B: 正态分布假设下的期权价格求解:

①对于服从正态分布的变量 X , 假设 $X \sim N(\mu, \sigma)$, 可对 $E[\max(X - K, 0)]$ 求解为:

$$\begin{aligned} E[\max(X - K, 0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \max(X - K, 0) \times e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_K^{+\infty} (X - K) \times e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX \end{aligned}$$

记 $u = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 因此有 $X = \sigma u + \mu$ 且 $dX = \sigma du$, 代入上式得到,

$$\begin{aligned} E[\max(X - K, 0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} (\sigma u + \mu - K) \times e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} u \times e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{+\infty} (\mu - K) \times e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}} + (\mu - K) \left[1 - \Phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \right] \end{aligned}$$

其中, $\Phi(\bullet)$ 为标准正态分布的累积分布函数。

②类似地, 可对 $E[\max(K - X, 0)]$ 求解为:

$$\begin{aligned} E[\max(K - X, 0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \max(K - X, 0) \times e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^K (K - X) \times e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX \end{aligned}$$

记 $u = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 因此有 $X = \sigma u + \mu$ 且 $dX = \sigma du$, 代入上式得到

$$\begin{aligned} E[\max(K - X, 0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} (K - \sigma u - \mu) \times e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} u \times e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{K-\mu}{\sigma}} (K - \mu) \times e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(K-\mu)^2}{2\sigma^2}} + (K - \mu) \Phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

其中, $\Phi(\bullet)$ 为标准正态分布的累积分布函数。

③看涨期权与看跌期权价格的求解

对于挂钩标的资产 t 时刻价格为 S_t 、到期日为 T 时刻、行权价为 K 的欧式看涨期权与欧式看跌期权, 若假设到期日标的资产价格 S_T 服从正态分布 (其风险中性世界分布为 $S_T \sim N(S_t R^f, \sqrt{v})$), 根据前述推导可分别计算欧式看涨期权价格 C_t 、欧式看跌期权价格 P_t 为:

$$\begin{aligned} C_t(S_t) &= \frac{1}{R^f} E[\max(S_T - K, 0)] = \frac{1}{R^f} \left\{ \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(K-S_t R^f)^2}{2v}} + (S_t R^f - K) \left[1 - \Phi\left(\frac{K-S_t R^f}{\sqrt{v}}\right) \right] \right\}, \\ P_t(S_t) &= \frac{1}{R^f} E[\max(K - S_T, 0)] = \frac{1}{R^f} \left[\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(K-S_t R^f)^2}{2v}} + (K - S_t R^f) \Phi\left(\frac{K-S_t R^f}{\sqrt{v}}\right) \right] \end{aligned}$$

附录 C:

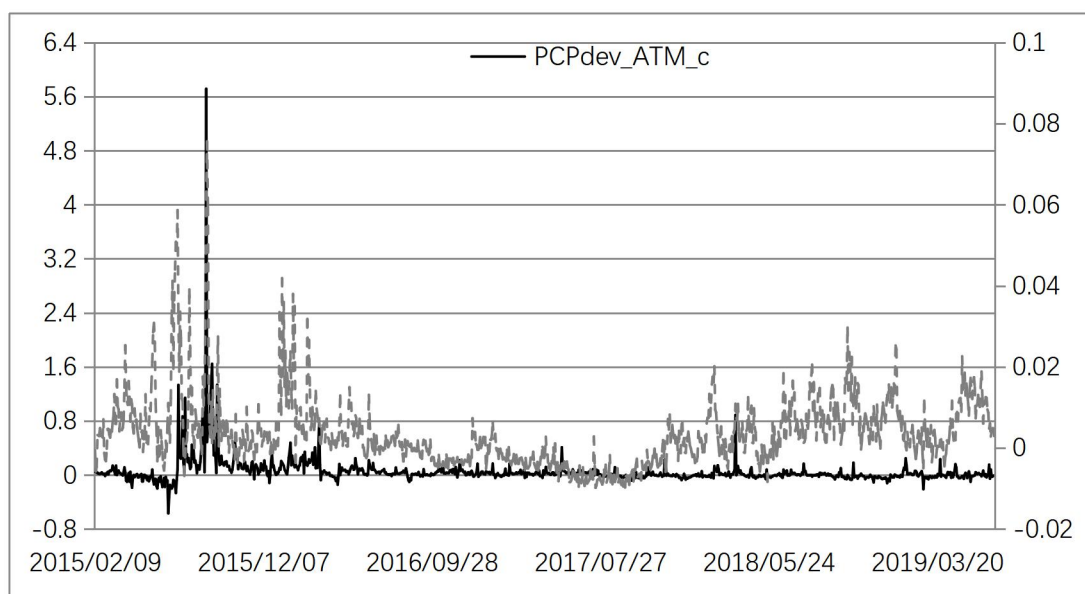
附表 1 全 A 股指与上证综指、上证 50 指数、深成指间的日度及月度相关系数

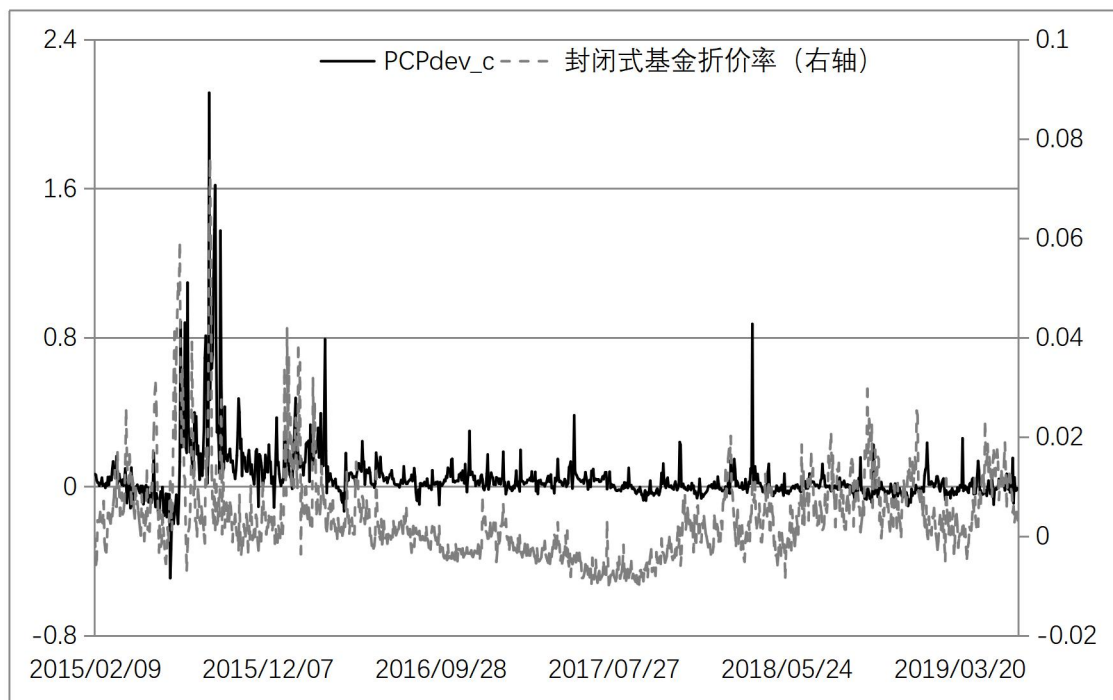
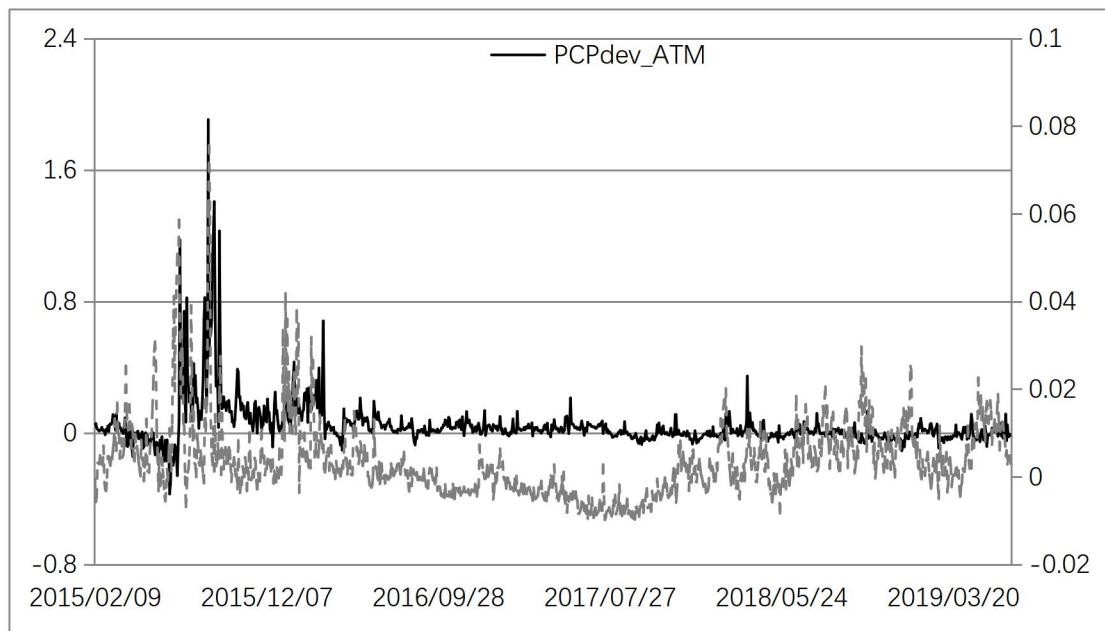
Panel A:	上证综指	上证 50 指数	深成指
股指日收益率			
全 A 股指	1.00***	0.89***	0.94***
Panel B:	上证综指	上证 50 指数	深成指
股指月收益率			
全 A 股指	0.99***	0.9***	0.96***

注: 表格中为相关系数值, ***代表 1% 的显著性水平, **代表 5% 的显著性水平, *代表 10% 的显著性水平。

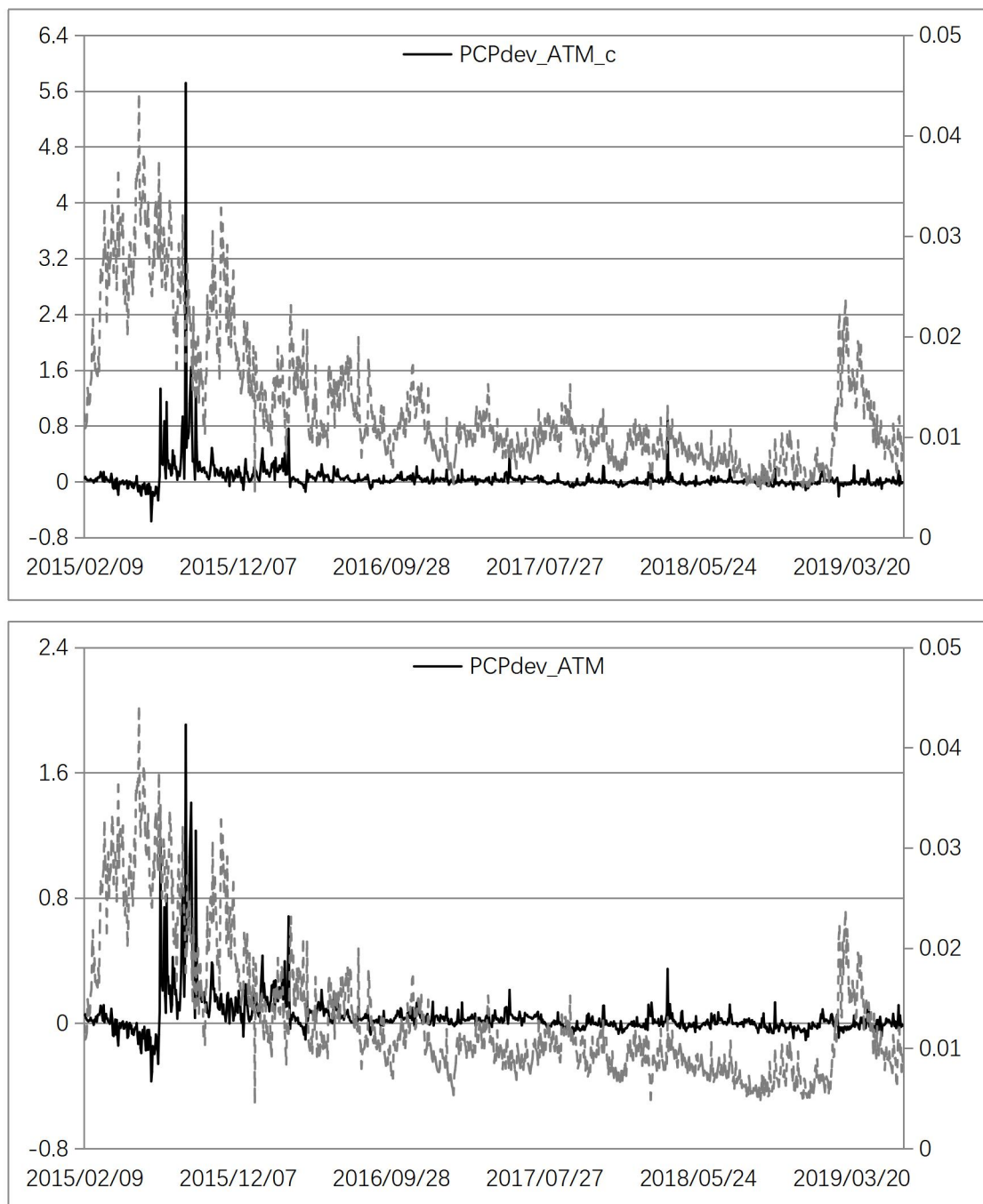
附录 D:

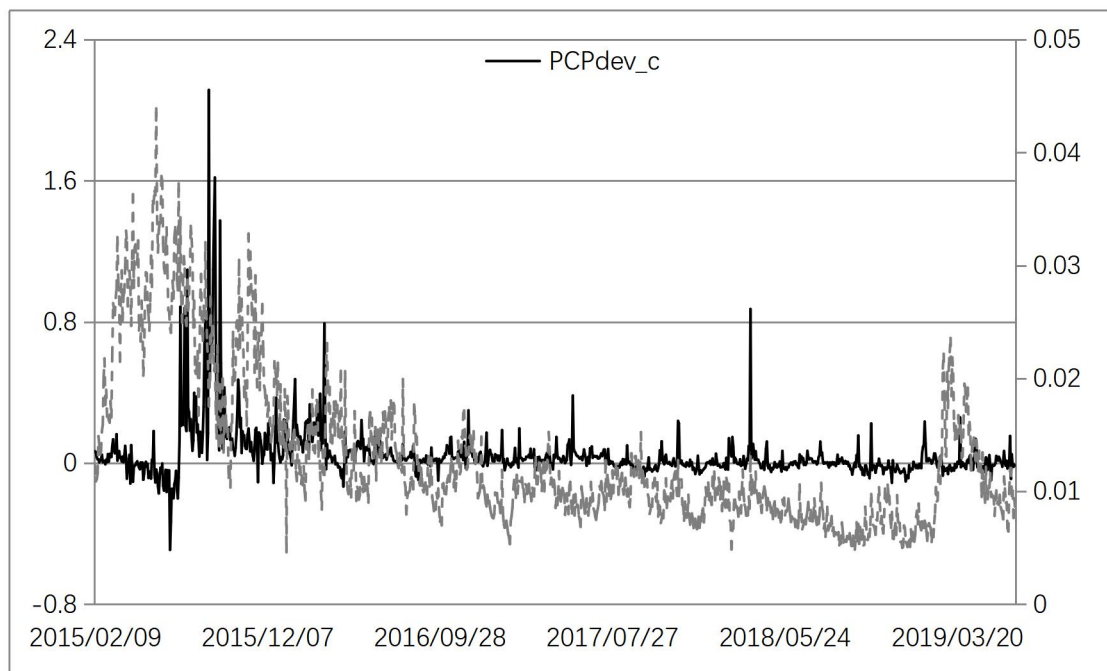
附图 1 其他三种 PCP 偏离与封闭式基金折价率时间序列



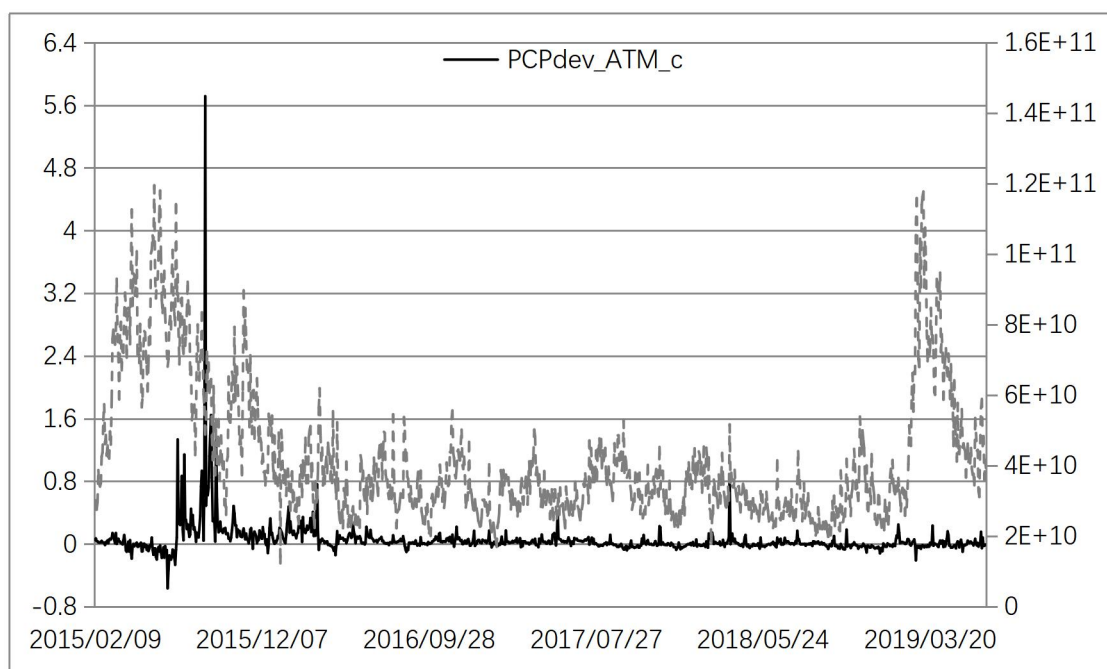


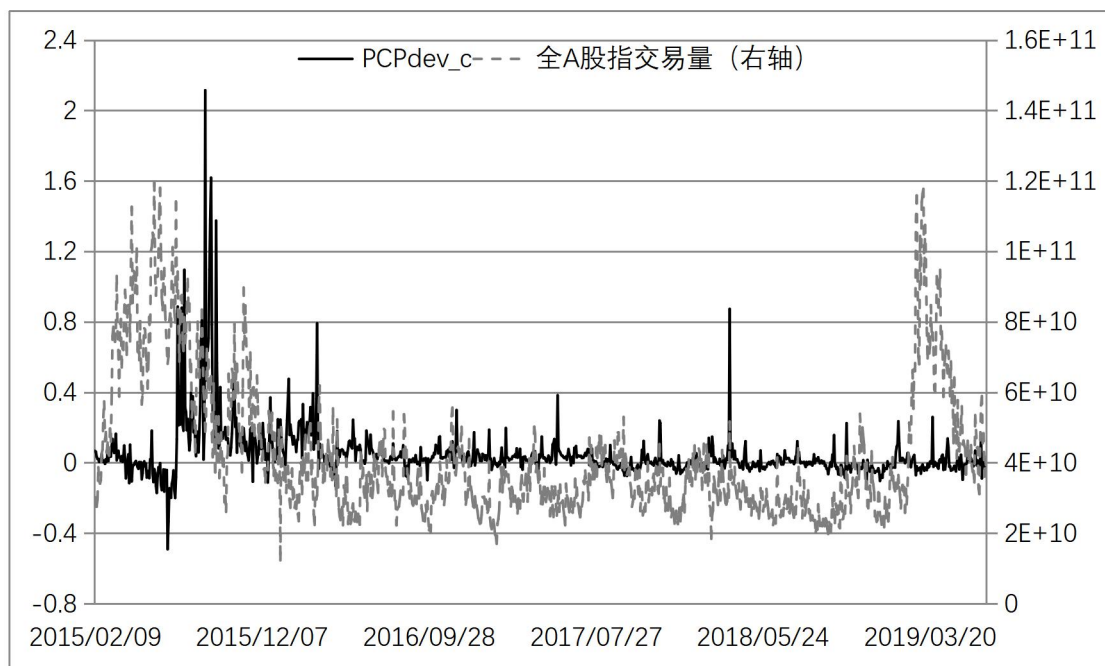
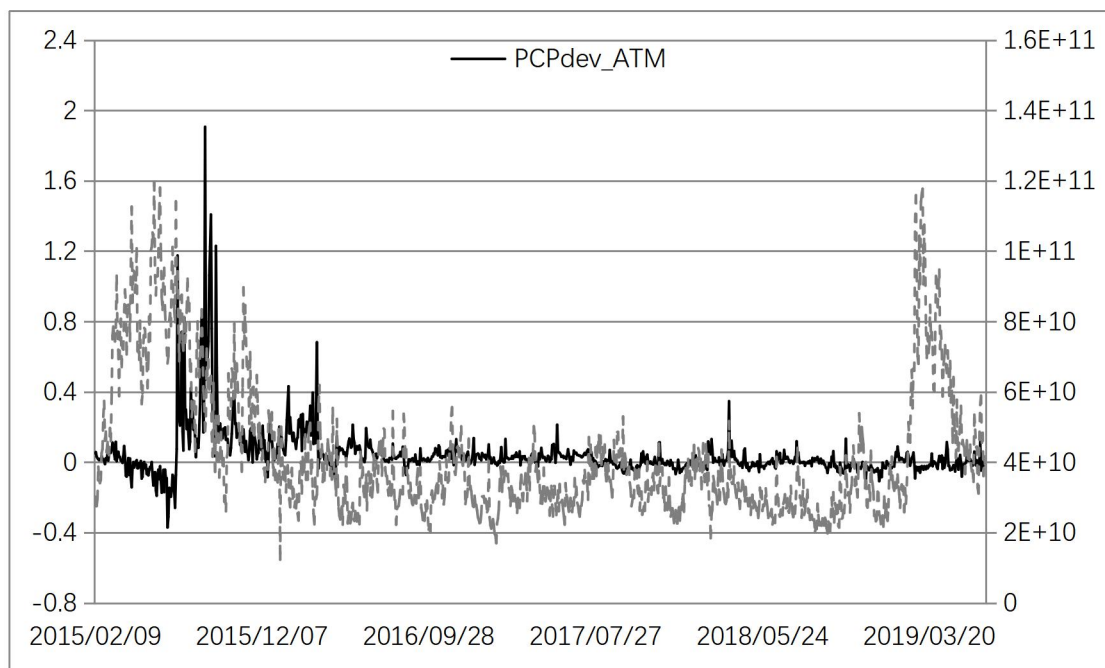
附图 2 其他三种 PCP 偏离与全 A 股指换手率时间序列



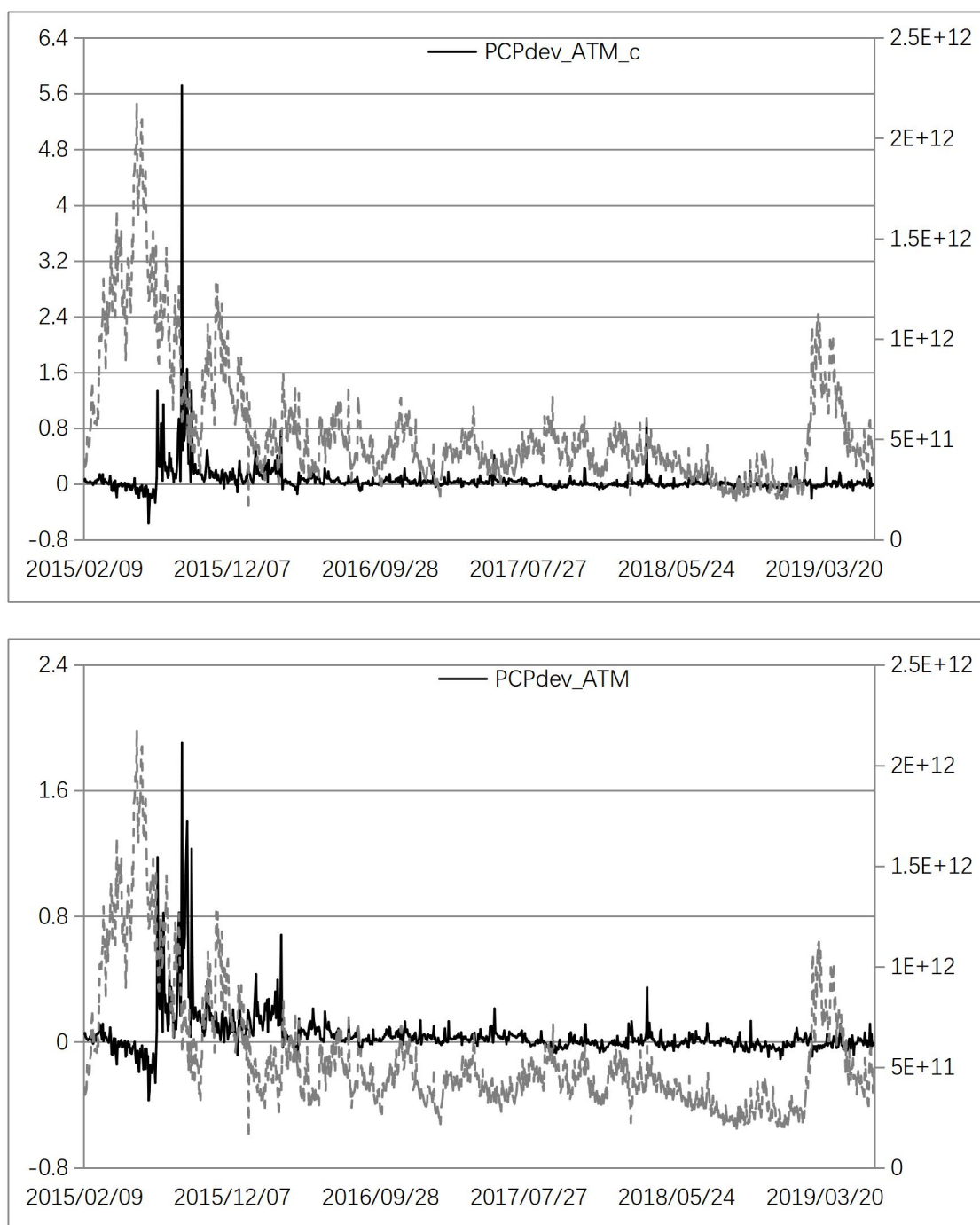


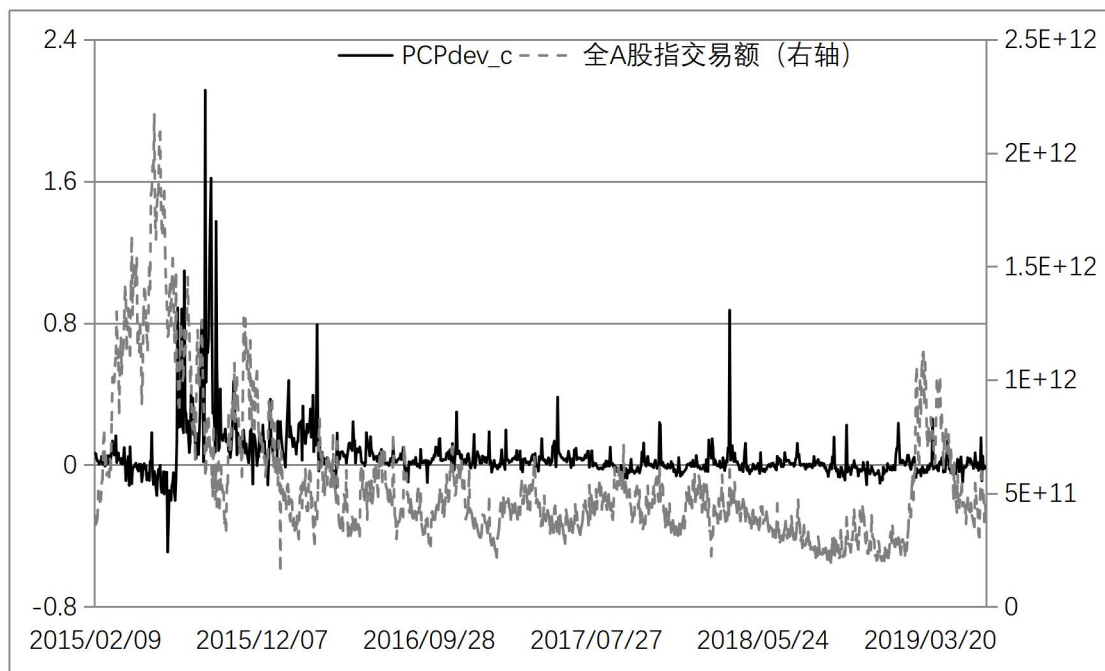
附图 3 其他三种 PCP 偏离与全 A 股指交易量时间序列





附图 4 其他三种 PCP 偏离与全 A 股指交易额时间序列





注：该附录是期刊所发表论文的组成部分，同样视为作者公开发表的内容。如研究中使用该附录中的内容，请务必在研究成果上注明附录下载出处。