北京大学国家发展研究院 2018 年双学位校外项目
入学考试数学试题

(共十二道大题，满分 100 分。注意把解答写在答题纸上，注明题号)

考号____________ 姓名__________ 成绩___________2018 年 4 月 14 日

一、填空题，每小 2 分，共 10 分

(1)设 A 是三阶方阵，$|A|=3,$ 则 $|(A^*)^{-1}-\frac{1}{2}A|=$____。

(2)设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda & 3 \\ 1 & 10 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$ ____。

(3)设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$______。

(4)设 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $ab=$ _______。

(5) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩为 1，A 中各行之和为 4，则 f 在正交变量替换 $X=QY$ 之下的标准形为_____。

二、给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-3x_4=t \end{cases}$$

(1)讨论当 p,t 为何值时，该方程组有解；(2 分)

(2)有解时写出全部解。(8 分)

三、设 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

(1)求 a,b；(2 分)

(2)用正交线性替换 $X=QY$ 把 f 化为标准形。(8 分)

四、已知 3 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$的一个特征值。

(1)求 y; (2 分)

(2)求可逆矩阵 P，使得 $(AP)^{\mathrm{T}}AP$ 是对角矩阵。(8 分)

五、 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right)\right]$; (5 分) (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\cos(\frac{k\pi}{n})$。 (5 分)

六、(1)设S是椭球面 $5x^2+6xy+5y^2+8z^2=8$，求函数 $w=x^2+y^2+z^2,(x,y,z)\in S$ 的极值；(8分)

(2)求该椭球面所围的体积。 (2分)

七、求下列定积分、曲面积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^2}$； (5 分)

(2) $\iint\limits_S(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,S$ 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(z\geq0)$ 的上侧。(5 分)

八、解微分方程:

(1)$(1+x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=\cot x\,\mathrm{d}x,y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$； (5 分)

(2) $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+2s=\cos2t$。(5 分)

九、(1)求 $f(x)=x^3-\pi^2x(-\pi\leq x\leq\pi)$ 的 Fourier 级数; (5 分) (2)求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$。(5 分)

十 、证明:假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二次连续可微， $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0,f(1)>0,F(x)=f^2(x)$。则

(1)存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $F''(\xi)=F''(\eta)=0;$ (5 分)

(2)存在 $\gamma\in(\xi,\eta)$，使得 $F''(\gamma)=\frac{F'(\gamma)-F'(\xi)}{\gamma-\xi}$。(5 分)