第 2 卷第 2 期　　经 济 学 (季 刊)　　Vol.2, No.2
2003 年 1 月　　China Economic Quarterly　　Jan., 2002

一个动态递归代理模型及半线性的首选最优契约

王苏生 *

摘　要　动态递归代理模型是基于一个遵循马尔可夫过程的自然状态而产生发展起来的，重复代理模型是其中的一个特例。人们发现最优的努力程度不仅取决于现在的绩效，而且也取决于过去的绩效，当前与过去努力程度的不一致是最优契约的决定因素。在一个委托人和代理人都是风险中性的特殊例子中，首选最优可以通过一个半线性的契约得到。在另一个特殊的重复代理情形中，当贴现率收敛于 0 时也会达到首选最优。对更一般的模型，我们发展了可以借助 MathCAD 来得到数字解的计算方法。

关键词　动态递归，代理模型，最优契约

一、引　　言

动态代理模型最近在解释一些经济现象时发挥了它们的威力，并被迅速应用于诸如产业组织、劳动经济学、卫生经济学、保险、对外贸易等广泛的领域。有关的例子请详见 Laffont(1995) 、 Green(1987) 和 Wang(1995, 1997) 。

然而，现在的无穷期动态代理模型几乎将“重复”的代理模型排除在外，它隐含的状态是独立同分布。这种模型首先由 SpearSrivastava (1987) 和 Green(1987) 引入，并在近年得到提炼和发展，例子请见 Abreu 、 Pearce 和 Stacchetti (1990), Thomas 和 Worrall (1990), Atkeson 和 Lucas (1992) 以及 Wang(1995, 1997) 。在这些模型中，代理人虽然确实关心他们未来的福利，但是每一期的不确定性处处存在，并且也没有随状态而改变的动态模型。例如在整个契约期限内，最优的努力程度是不变的，它并不随着状态的改变而改变。本文的模型允许隐含的状态是一个马尔可夫过程。它包含一个重复代理模型的特例。借此，我们就有了一个适应更多代理问题的无穷期动态代理模型，我们称这种模型为递归代理模型，与之相反的是重复代理模型。

“重复”这个词来自重复博弈。如我们所知，如果博弈是可以重复的并且贴现率很低的话，“囚徒困境”可以产生有效的解。同样，虽然静态的“委托 - 代理”模型通常不能得到首选最优解，但 Thomas 和 Worrall(1990) 已经证明，在一个重复的代理模型中，最优契约的效率可以被改进，如果不存在贴现率的话，它甚至有可能达到首选最优。我们将证明这个结果对于该模型的重复情形也是成立的。

我们对递归代理模型的主要兴趣在于最优契约的动态特征。如我们所知，最优契约不仅取决于当前的绩效，同时也取决于过去的绩效。不同于那

* 香港科技大学经济系。通信地址： Susheng Wang, Economics Department, HKUST, Clear Water Bay, Hong Kong; 电话： (852)2358 7630; Email: s.wang@ust.hk 。

些模型中契约的制定仅仅信赖于当前的绩效，递归模型中的委托人也将过去的信息作为签约的基础。在这种情况下，一个代理人不必因为良好的绩效而得到高报酬，如果最后一期整体经济良好的话。这是因为绩效与产出之间的高度相关性，如果经济在最后一期绩效非常好，良好的绩效有可能来自经济环境而不是更加努力的工作。人们也发现当前绩效与过去的绩效的不一致是最优契约的决定因素。委托人不但用产出来进行奖惩，而且还用产出来衡量代理人的努力程度。换句话说就是在动态契约中，委托人特别依赖于相对的绩效来提高效率。

在重复代理模型中，“自然状态”是代理人所能预知的最大的效用。然而，预知的效用是不可观察的，它使得通过实证检验一个理论变得困难。而产量和利润从另一角度来讲是可观察的。在本文中，我们将假定代理人的效用是不可证实的。既然在现实中，产量和利润在一段时间里是高度相关的，尤其是月度数据更是如此，通过将代理模型中的自然状态视为“马尔可夫过程”，我们可以把产量或者利润看作自然状态，并且这些结果可以通过真实世界的数据得到验证。

这篇文章的结构如下。在第二节，我们以一个基本的静态代理模型和一个重复代理模型一起提出我们的模型，并讨论该模型两种不同的设计机制。对本模型解的基本分析我们将在第三节进行。第四节是一个在风险中性下的有趣的特例，在其中我们可以发现一个半线性首选最优契约。正如基本静态代理模型一样，在一般的情况下，通常没有显式解 (closed-form solution)。在第五节，将提供一种计算法则并用它来解一个数学例子。本节还讨论了对我们模型解的一些有趣观察。第六节通过几个结论来总结本文。附录是对性质 1 至性质 5 的证明。

二、模　　型

(一) 三个代理模型

考虑一个委托－代理关系：一个委托人雇佣一个代理人生产一种产品。产量 $x \in Y$ 是随机的。其中 Y 是任一 Lebesgue 可测集，$Y \subset R$。对于静态的代理模型，代理人的努力程度 $a \in A$ 给定，这里 A 也是任意的 Lebesgue 可测集，$A \in R$, 产量遵循一个由密度函数 $f(x|a)$ 描述的过程，定义域为 $x \in Y$。委托人的偏好由支付 x 的效用函数 $v(x)$ 来表示，代理人的偏好由努力程度 a 和支付 x 的效用函数 $u(x, a)$ 表示。我们假定

$$v' > 0, \quad v'' \leq 0, \quad u_x > 0, \quad u_{xx} < 0, \quad u_a < 0.$$

委托人可以观察和确定产量 x 但是不能确定努力程度 a; 她于是就给代理人一个基于产量的合约 $s(x)$, 这个合约的签约空间是

$$s_0 = \{s : Y \to R_+ | s \text{ 是 Lebesgue 可测集}\}.$$

注意，我们要求 $s(x) \geq 0$, 并且称它为有限责任条件。最后，令 $\overline{U}$ 为代理人接受委托人合约时的最佳预期效用。下面是关于代理问题的基本的静态代理模型：

$$\begin{aligned} V \equiv \max_{a\in A, s\in s_0} & \int v[x-s(x)]f(x|a)\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad & a \in \arg\max_{a'\in A}\int u[s(x),a']f(x|a')\mathrm{d}x \\ & \int u[s(x),a]f(x|a)\mathrm{d}x \geq \overline{U}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

也就是说，委托人在激励相容的限制条件 (IC) 和个人理性 (IR) 下最大化她的效用。有关这个模型的详细论述请见 Mirrless(1974) 、 Holmstrom(1979) 、 Grossman 和 Hart(1983) 、 Holmstrom 和 Milgrom (1987) 以及 Kim 和 Wang (1998) 。由于代理方的道德风险导致了该模型的解通常是次优的。

为了改进 (2.1) 中次优性的不足，人们提出了一个重复模型。当产出过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 是独立同分布时， Spear 和 Srivastava (1987) 提出了一个无穷代理问题的无穷期情形：[1]

$$\begin{aligned} V(w) = \max_{a(w),U(\cdot,w),s(\cdot,w)} & \int \{v[x-s(x,w)]+\alpha V[U(x,w)]\}f[x|a(w)]\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad & a(w) \in \arg\max_{a\in A}\int\{u[s(x,w),a]+\beta U(x,w)\}f(x|a)\mathrm{d}x \\ & \int\{u[s(x,w),a(w)]+\beta U(x,w)\}f[x|a(w)]\mathrm{d}x \geq w, \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于所有的 $w \in W$ 成立，其中 w 是如果代理人接受委托人的合约所能得到的最好的效用预期。它的解将会给出四个函数方程： $a(\cdot), U(\cdot), s(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 。关于这个模型近期有大量的论述；请见 Rogerson(1985a) 、 Abreu, Pearce 和 Stacchetti (1990) 、 Atkeson 和 Lucas (1992) 以及 Wang (1995, 1997) 。尤其是 Thomas 和 Worrall (1990) 证明了在一个重复的代理模型中，如果对未来没有贴现的话，最优契约的效率可以得到改进，甚至可以达到首选最优。

将一个动态代理模型扩展到一个允许自然状态为马尔可夫过程的模型是很自然的。如果产出过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 是马尔可夫过程，也就是说对于一个给定的密度函数 f, 即 $y_{t+1} \sim f(\cdot|y_t, a_t)$, 那么，代理问题的正确形式是什么样子的呢？对于市场中每一个产出 y, 代表着最优效用预期由效用函数 $\overline{U}(y)$ 给定，

[1] 既然问题 (2.2) 中的限制条件对任意的 w 都成立，它对 $U(w,y)$ 一定成立。于是我们一定有

$$U(w,y) = \int\{u(s[U(w,y),y'],a[U(w,y)]) + \beta U[U(w,y),y']\}f(y'|a[U(w,y)])\mathrm{d}y',$$

对于所有的 $w \in W$ 和 $y \in Y$ 都成立。 Spear 和 Srivastava(1987) 将此条件作为三个限制条件列举出来，其实它确实是多余的。

我们将证明下面的形式是代理问题的适当形式：

$$
\begin{aligned}
V(y) = \max_{a(y),U(\cdot),s(\cdot,y)} & \int \{v[x-s(x,y)]+\alpha V(x)\} f[x|y,a(y)]\mathrm{d}x \\
\text{s.t. } & a(y) \in \arg\max_{a\in A} \int \{u[s(x,y),a]+\beta U(x)\} f(x|y,a)\mathrm{d}x, \\
& \int \{u[s(x,y),a(y)]+\beta U(x)\} f[x|y,a(y)]\mathrm{d}x = U(y), \\
& U(y) \geq \overline{U}(y),
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

对于所有的 $y \in Y$ 。它是一个递归代理模型。它的解是包含四个函数的一个数组 (a,s,U,V) 。在这个例子中，解显然依赖于初始的效用水平 $w=\overline{U}(y)$ 。但是既然 $\overline{U}(\cdot)$ 是一个给定的函数，我们不必明确的表明合约依赖于 $\overline{U}$ 。也就是说，(2.3) 式的解对 $\overline{U}$ 的依赖性是隐含的；我们将用 y_t 来代替，作为时期 t 的自然状态且解将会是状态的函数，事实上，(2.2) 是 (2.3) 在给定 w, $y=\overline{U}^{-1}(w)$ 时的特例。这是因为它是两种形式解的不同所产生的 ——(2.2) 的解是一个开集，而 (2.3) 的解是一个闭集。

由于我们模型的递归特性，(2.3) 的解是时间一致的。

结论 1 在这篇文章里，我们只考虑形如 $y_{t+1} \sim f(\cdot|y_t,a)$ 的一阶马尔可夫过程。将其扩展到任意有穷阶马尔可夫过程是很自然的。也就是说，我们的递归模型可以应用到任一固定有限期内的静态随机产量过程。

结论 2 递归模型包括了许多动态的模型。在宏观经济学中，经济学家在采用无穷期模型进行理论分析时，无一不使用递归。Lucas (1978) 与 Stokey 和 Lucas (1989) 这两篇文章为宏观经济学奠定了基础。递归模型有两个最主要的优点。第一，它的解是时间一致的。第二，它们经常可以为我们提供具有吸引力的可操作性强的解。在契约中，非递归模型通常依赖数字解。

结论 3 模型 (2.2) 的一个问题是委托人在下一期将 $U(x,w)$ 来表示市场状态。但是市场状态经常与 $U(x,w)$ 不同。例如，在稳态，市场在下一期将仍可能生产 w, 这与 $U(x,w)$ 不同。市场状态是外生决定的；内生决定的 $U(x,w)$ 不可能反映出来。既然在我们的模型 (2.3) 中不存在这种不一致性；那么市场状态可以通过一个外生的过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 来表示。

(二) 递归模型的设定

我们现在正式地设定模型。在时期 t 给定一个产出行为组合 (y_t,a_t), 用 $y_{t+1} \sim f(\cdot|y_t,a_t)$ 来表示 y_t 服从密度函数为 $f(\cdot|y_t,a_t)$ 的条件分布。我们称 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 是一阶静态马尔可夫过程，用 f 表示：$Y^2 \times A \to R_+$ 。我们用 $N=\{0,1,2,\cdots\}$ 表示所有的正整数。

假设 1(马尔可夫过程) 对于所有的 $y_t \in Y, a_t \in A$ 和 $t \in N, y_{t+1} \sim f(\cdot|y_t,a_t)$, 我们称 $f(\cdot|y_t,a_t)$ 是具有控制 $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$ 马尔可夫过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 的转移密度函数。给代理人的支付系列 s_t 的契约 $\{s_t\}_{t=0}^{\infty}$ 给定，委托人的效用函数

是 v: $R \to R$, 用 $v_1 = v(y_t - s_t)$ 表示在 t 时刻的效用。代理人的效用是 u: $R_+ \times A \to R$, 用 $u_t = u(s_t, a_{t-1})$ 来表示在 t 时刻的效用。这与标准形式是一致的，一个例子请见 Spear 和 Srivastava(1987)。行为 a_t 的目标是下一期的效用 u_{t+1}。另外， a_t 的选择是基于已经观察到的 y_t。我们将把契约空间限制如下：[2]

$$S \equiv \{s : Y^2 \to R_+ | s \text{ 是 Lebesgue 可测集}\}.$$

也就是说，我们仅仅考虑依赖于当前状态和上一期状态表现的反馈契约：$s_t = s(y_t, y_{t-1})$。我们猜想其他更一般的契约不会是我们的反馈契约的帕累托最优。仅考虑这种合约，我们可以将一般的动态代理总是转化成 (2.3) 式中的递归问题。在这种情况下，我们一定有 $a_{t-1} = a(y_{t-1})$。那么，行为空间是：

$$A \equiv \{a : Y \to A | a \text{ 是 Lebesgue 可测集}\}.$$

总之，变量序列 $\{a_t, s_t, u_t, f_t,\}$ 被定义为

$$a_t = a(y_t), \quad s_{t+1} = s(y_{t+1}, y_t), \quad u_{t+1} = u(s_{t+1}, a_t), \quad f_{t+1} = f(y_{t+1}|y_t, a_t).$$

由马尔可夫过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 和行为函数 $a(\cdot)$ 定义的期望算子 $E_t^{a(\cdot)}$, 表明对于 $s \le t$ 和所有的 Borel 可测函数 $\varphi : Y \to R$, 我们有：

$$E_s^{a(\cdot)}[\varphi(y_{t+1})] \equiv \int \cdots \int \left\{ \int \varphi(y_{t+1}) f[y_{t+1}|y_t, a(y_t)] \mathrm{d}y_{t+1} \right\} \cdot f[y_t|y_{t-1}, a(y_{t-1})] \mathrm{d}y_t \cdots \mathrm{d}y_{s+1},$$

其中 y_s 给定。同样的，由马尔可夫过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 和行为函数 $\{a_\tau\}$ 定义的期望算子 $E_t^{a(\tau)}$, 表明对于 $s \le t$ 和所有的 Borel 可测函数 $\varphi : Y \to R$, 我们有：

$$E_s^{\{a_\tau\}}[\varphi(y_{t+1})] \equiv \int \cdots \int \left\{ \int \varphi(y_{t+1}) f(y_{t+1}|y_t, a_t) \mathrm{d}y_{t+1} \right\} \cdot f(y_t|y_{t-1}, a_{t-1}) \mathrm{d}y_t \cdots \mathrm{d}y_{s+1}.$$

同时我们定义

$$E_y^a[\varphi(x)] \equiv \int \varphi(x) f(x|y, a) \mathrm{d}x.$$

将历史记作 $h' \equiv (y_0, y_1, \cdots, y_t)$, 且

$$L[Y] \equiv \{U : Y \to R | U \text{ 是 Lebesgue 可测集}\}.$$

并且，方便起见，在不引起混淆的情况下，我们将使用如下记号， $y = y_t$ 和 $x = y_{t+1}$。考虑委托问题的一个正式表述：

$$\begin{aligned}
V(y_0) = & \max_{\{s(h^t)\},\{a(h^t)\}} E_0^{\{a(h^t)\}} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} v[y_t - s(h^t)] \\
& \text{s.t.} \quad y_{t+1} \sim f[\cdot|y_t, a(h^t)], \quad \forall t \ge 0, \\
& \{a(h^t)\} \in \arg \max_{\{a_\tau\} \in A^\infty} E_0^{\{a_\tau\}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^{\tau-1} u[s(h^\tau), a_{\tau-1}] \text{s.t.} y_{\tau+1} \sim f(\cdot|y_\tau, a_\tau), \\
& E_0^{\{a(h^t)\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u[s(h^t), a(h^{t-1})] \ge \overline{U}(y_0), \quad \forall y_0 \in Y.
\end{aligned}$$

[2] 简单起见，目前我们不对所有的 $t \in N$ 都加上 $s_t \le y_t$ 的条件。但是在 5.2 节的数学例子里将满足这个条件。

既然我们仅考虑 S 上的形如 $s_t = s(y_t, y_{t-1})$ 的反馈契约，这个问题可以重新写为

$$
\begin{aligned}
V(y_0) = & \max_{s(\cdot,\cdot)\in S,\{a(h^t)\}} E_0^{\{a(h^t)\}} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} v[y_t - s(y_t, y_{t-1})] \\
& \text{s.t.} \quad y_{t+1} \sim f[\cdot|y_t, a(h^t)], \quad \forall t \geq 0, \\
& \{a(h^t)\} \in \arg\max_{\{a_\tau\}\in A^\infty} E_0^{\{a_\tau\}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^{\tau-1} u[s(y_\tau, y_{\tau-1}), a_{\tau-1}] \\
& \text{s.t.} y_{\tau+1} \sim f(\cdot|y_\tau, a_\tau), \\
& E_0^{\{a(h^t)\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u[s(y_t, y_{t-1}), a(h^{t-1})] \geq \overline{U}(y_0), \quad \forall y_0 \in Y.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

第一个任务是证明 (2.3) 和 (2.4) 是相同的。结果在性质 1 中，它的证明请见附录。

性质 1(递归性) 给定 $\overline{U} \in L(Y)$, (2.4) 的解一定是 (2.3) 的一个解，对于 (2.3) 有， $a \in A, s \in S$ 且 $V, U \in L(Y)$ 。

(三) 另一种模型设定

对 (2.3) 有两种设定。第一种设定中 IR 条件只有在最初的市场约束下才满足。在这种情况下，在契约开始 $t = 0$ 时，给定最佳可选机遇的效用水平 $\overline{U}$, 这个问题可以被表述为

$$
\begin{aligned}
V(y) = & \max_{a(\cdot)\in A, U(\cdot)\in L[Y], s(\cdot,\cdot)\in S} \int \{v[x - s(x,y)] + \alpha V(x)\} f[x|y, a(y)] \mathrm{d}x \\
& \text{s.t.} \quad a(y) \in \arg\max_{a\in A} \int \{u[s(x,y), a] + \beta U(x)\} f(x|y, a) \mathrm{d}x, \\
& \int \{u[s(x,y), a(y)] + \beta U(x)\} f[x|y, a(y)] \mathrm{d}x = U(y), \\
& U(y_0) \geq \overline{U}.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

这样，契约保证了它在 $t = 0$ 的可接受性，但它可能需要在将来的某个时间强制执行。如果在将来某个时间 $t, U(y_t) < \overline{U}$, 代理人将会违约。

在第二种设定中，我们完全忽略了外部竞争，考虑一个简单的情形：

$$
\begin{aligned}
V(y) = & \max_{a(\cdot)\in A, U(\cdot)\in L[Y], s(\cdot,\cdot)\in S} \int \{v[x - s(x,y)] + \alpha V(x)\} f[x|y, a(y)] \mathrm{d}x \\
& \text{s.t.} \quad a(y) \in \arg\max_{a\in A} \int \{u[s(x,y), a] + \beta U(x)\} f(x|y, a) \mathrm{d}x, \\
& \int \{u[s(x,y), a(y)] + \beta U(x)\} f[x|y, a(y)] \mathrm{d}x = U(y).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

第二节中模型 (2.3) 是限制性最强的， (2.5) 次之， (2.6) 最弱。 (2.3) 保证了契约对于代理人来说在任何状态下的可接受性， (2.5) 保证了最初时的可接受性，而 (2.6) 什么都保证不了。因此， (2.3) 中的契约是时间一致的，

因此不需要强制执行，而 (2.5) 和 (2.6) 中的契约当市场状态变化的时候就需要强制执行了。如果 (2.3) 有解，那么 (2.5) 和 (2.6) 肯定有解。

在这三种设定中，我们在下面的文章中仅考虑模型 (2.3)。

三、模型分析

在这一节中，我们将考察模型 (2.3) 的一些性质。

假设 2(可分效用函数) $u(s,a)=u(s)-c(a)$.

通过假设 2, 若一阶展开 (FOA) 成立，那么 (2.3) 式就变成了

$$V(y)=\max_{a\in A,s\in S}\int\{v[x-s(x,y)]+\alpha V(x)\}f(x|y,a)\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.}\quad \int\{u[s(x,y)]+\beta\overline{U}(x)\}f_a(x|y,a)\mathrm{d}x=c'(a), \tag{3.1a}$$

$$\int\{u[s(x,y)]+\beta\overline{U}(x)\}f(x|y,a)\mathrm{d}x=c(a)+\overline{U}(y). \tag{3.1b}$$

当 $z>\frac{v'(x)}{u'(0^+)}$ 时，令 $s=h(x,z)$ 是 $\frac{v'(x-s)}{u'(s)}=z$ 的单一解。h 定义良好，且随 z 严格递增 (见性质 2 的证明)。令

$$\phi(x,z)\equiv\begin{cases}h(x,z), & \text{if } z>\frac{v'(x)}{u'(0^+)},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

性质 2(最优契约) 在假设 2 下，若 FOA 成立，那么最优契约是

$$s(x,y)=\phi\Big\{x,\lambda(y)\frac{f_a}{f}[x|y,a(y)]+\mu(y)\Big\}, \tag{3.2}$$

其中 $\lambda(y)$ 和 $\mu(y)$ 分别是 (3.1) 中的 IC 和 IR 条件的拉格朗日乘子。

性质 2 表明，给定上一期的表现 y, 契约解的公式与静态模型一样。在委托人是风险中性的特殊例子中，我们有 $h(z)=(u')^{-1}(\frac{1}{z})$ 且

$$\phi(z)=\begin{cases}h(z), & \text{if } z>\frac{1}{u'(0^+)},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

那么，

$$s(x,y)=\phi\Big\{\lambda(y)\frac{f_a}{f}[x|y,a(y)]+\mu(y)\Big\}.$$

例如, 如果 $u(z)=\frac{1}{1-\gamma}z^{1-\gamma}$, 其中 γ 是 RRA, 对于 $z>0$, 我们有 $h(z)=z^{1/\gamma}$ 和 $u\circ h(z)=\frac{1}{1-\gamma}z^{\frac{1}{\gamma}-1}$。为使这个特殊的 u 有凹的 $u\circ h$, 我们需要 $\gamma\geq\frac{1}{2}$。

当前表现 x 中 $s(x,y)$ 的单调性，或者说 $\lambda(y)$ 的正号由下面的定理保证：

定理 3(单调性) 在假设 2 下，若 FOA 成立，且 $\frac{f_a}{f}(x|y,a)$ 随 x 递增，则我们必有对于所有的 $y\in Y,\lambda(y)>0,\mu(y)\geq 0$。

考虑一个递归模型的重复情形，对于给定的密度函数 f，产出过程 $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ 服从 $y_{t+1} \sim f(\cdot|a_t)$，而不是 $y_{t+1} \sim f(\cdot|y_t, a_t)$，这时，$\overline{U}(y), V(y)$ 和 $f(x|y,a)$ 都独立于 y。那么，(2.3) 变成了

$$\begin{aligned} V = \max_{a\in A, s\in S_0} & \frac{1}{1-\alpha}\int v[x-s(x)]f(x|a)\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad & a \in \arg\max_{a'\in A}\int u[s(x),a']f(x|a')\mathrm{d}x, \\ & \frac{1}{1-\beta}\int u[s(x),a]f(x|a)\mathrm{d}x = \overline{U}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

性质 4 (重复情形下的首选最优) 如果当 $\alpha \to 1$ 时，$\alpha = \beta$，那么重复递归模型 (3.3) 的解收敛于首选最优且 $\overline{U} = 0$。

四、风险中性的递增归模型

(一) 一个半线性契约

线性契约在契约理论的应用中被证明是非常普遍的。次优线性契约的存在性由 Bhattacharyya 和 Lafontaine(1995) 首次发现，后来被 Kim 和 Wang(1998) 加以扩展。对于风险中性的静态模型来说，线性契约是存在的，它不但简单直观，而且是首选最优的。对一个动态模型，我们能否也找到这样一个契约呢？

性质 5(半线性契约) 如果委托人和代理人都是风险中性的，假设一阶近似有效，那么存在一个如下形式的半线性契约，其最优努力程度是 $a^*(y)$:

$$s(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y), \tag{4.1}$$

其中 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 被定义为:

$$\varphi(y) = \frac{c'[a^*(y)] - \beta\int \bar{U}(x)f_a[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x}{\int xf_a[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x}, \tag{4.2a}$$

$$\begin{aligned} \psi(y) = {} & \overline{U}(y) + c[a^*(y)] - \beta\int \overline{U}(x)f[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x \\ & - \frac{\int xf[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x}{\int xf_a[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x}\left\{c'[a^*(y)] - \beta\int \overline{U}(x)f_a[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x\right\} \end{aligned} \tag{4.2b}$$

其中 $V(\cdot)$ 和 $a^*(\cdot)$ 由下式定义:

$$\int [x + \alpha V(x) + \beta\overline{U}(x)]f_a[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x = c'[a^*(y)], \tag{4.3a}$$

$$\int [x + \alpha V(x) + \beta\overline{U}(x)]f[x|y,a^*(y)]\mathrm{d}x = V(y) + \overline{U}(y) + c[a^*(y)]. \tag{4.3b}$$

给定 (4.1) 式的解，在什么条件下，FOA 成立？我们发现如果对于任意的 $(a,y) \in A \times Y$，有 $\int \overline{U}(x)f_{aa}(x|y,a)dx \leq 0$ 和 $\int xf_{aa}(x|y,a)dx \leq 0$ 成立，并

且对任意的 $y \in Y$ 有 $\varphi(y) \geq 0$, 那么 $a^*(y)$ 的 IC 条件的二阶条件 (SOC) 对任意的 $y \in Y$ 成立，也就是说， FOA 成立。

例 1 令

$$\begin{aligned} & y_t = a_t + y_{t-1} + \varepsilon_t, \\ & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \\ & \overline{U}(y) = by, \\ & c(a) = \frac{1}{2}a^2, \end{aligned}$$

其中 $b \geq 0$ 且 $\sigma > 0$ 为常数。那么

$$f(x|y,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a-y)^2}{2\sigma^2}}, \quad R(y,a) \equiv \int xf(x|y,a)\mathrm{d}x = a + y,$$

由性质 5 可知解为：

$$\begin{aligned} & a^* = \frac{1 + b(\beta - \alpha)}{1 - \alpha}, \\ & s(x,y) = \frac{1 - \alpha b(1-\beta)}{1-\alpha}x - \frac{1 - b(1-\beta)}{1-\alpha}y - \frac{1}{2}\Big[\frac{1 + b(\beta-\alpha)}{1-\alpha}\Big]^2, \\ & V(y) = \frac{1 - (1-\beta)b}{1-\alpha}y + \frac{[1 + b(\beta-\alpha)]^2}{2(1-\alpha)^3}. \end{aligned}$$

这个例子中 FOA 成立。由于有对将来的折现，双方将在风险中性条件下平分收益。

真实世界的契约都有关于利益分配的简单规则，但这样的规则经常是跨时的。例如外国直接投资 (FDI) 通常是通过两种形式的契约来执行：中外合资 (EJV) 和中外合作 (CJV) 。中外合资是两个企业：本地企业和外国企业，对资产所有权的分配达成协议，并按照资产的比例分配利益。如果双方均同意在他们中间进行资产交易，那么资产比例在将来可能发生变动，因此利益分配也会随之变动。另一方面，在中外合作情况下 (CJV), 在签约期内，利益分配比例已经确定，资产比例是无关的。通常规定在签约期满后，所有的资产属于其中的一方。在实际中， EJV 倾向于在签约期内有一个固定的分配规则，而 CJV 则倾向于有一个变化的分配规则。事实上， CJV 中的利益分配每年都有很大的变化。

在利益分配规则不断发展的过程中有许多有趣的现象。但是由于其复杂性，有关这方面的研究却非常有限。这方面的一个例子请见 Tao 和 Wang(1998), 他讨论了一个著名的令人感到迷惑的现象：在中国，所有的 CJV 的本地企业的利益分配比例在签约期内逐年上升。在我们的模型中，若产出以一个固定的速度 r 增长时，我们将看到代理人的分配比例 $\frac{s(x,y)}{x}$ 随产出增加，这与 Tao 和 Wang(1998) 的现象一致。另外，当产出趋于无穷时，利益分配比例将收敛于一个常数。

(二) 风险中性下的重复模型

如果我们将密度函数 $f(x|y,a)$ 替换成 $f(x|a)$，那么我们就有了一个重复模型，它是性质 5 的一个特例。令 $R(a)\equiv\int xf(x|a)$ 为收益函数。在这种情况下， $f(x|y,a)\overline{U}(y)$ 和 $V(y)$ 对 y 都是独立的，因此由性质 5 我们立即可以得到解

$$s(x)=x+(1-\beta)\overline{U}+c(a^*)-R(a^*), \tag{4.4a}$$

$$V=\frac{R(a^*)-c(a^*)-(1-\beta)\bar{U}}{1-\alpha}, \tag{4.4b}$$

其中 a^* 由 $R'(a^*)=c'(a^*)$ 决定。正如我们所期望的那样，当 $\alpha=\beta=0$ 时，对这个静态模型，得到大家所熟知的首选最优解。

Spear-Srivastava 模型是一个重复模型，它可以与递归模型的重复情形做一个对比。风险中性下的 Spear-Srivastava 模型有如下的解：

$$s(x,w)=x+w-\beta\bar{u}+c(a^*)-R(a^*), \tag{4.5a}$$

$$V(w)=\frac{R(a^*)-c(a^*)}{1-\beta}-w, \tag{4.5b}$$

其中 a^* 由 $R'(a^*)=c'(a^*)$ 决定，且 $\bar{u}=U(x,w)$ 是常数。注意为了避免非一致性，我们必须对风险中性下的 Spear-Srivastava 模型加上 $\alpha=\beta$ 的条件；同时， $\bar{u}$ 未定，它可以是任意的数。

比较重复递归模型的解 (4.4) 与 Spear-Srivastava 模型的解 (4.5)，如果 $w=\bar{u}=\overline{U}$ 且 $\alpha=\beta$，这两个解是相同的。我们的模型更一般化，因为它允许 $\alpha\neq\beta$。

五、计 算

(一) 一个计算法则

通过第 3 节的分析，解模型 (2.3) 可以得到五个方程 $[s(x,y),a(y),V(y),\lambda(y),\mu(y)]$ 对所有的 $y\in Y$，它们由以下几个方程定义：

$$V(y)=\int\{v[x-s(x,y)]+\alpha V(x)\}f[x|y,a(y)]\mathrm{d}x, \tag{5.1a}$$

$$\int\{u[s(x,y)]+\beta\overline{U}(x)\}f_a[x|y,a(y)]\mathrm{d}x=c'[a(y)], \tag{5.1b}$$

$$\int\{u[s(x,y)]+\beta\overline{U}(x)\}f[x|y,a(y)]\mathrm{d}x=\overline{U}(y)+c[a(y)], \tag{5.1c}$$

$$s(x,y)=\phi\Big\{x,\lambda(y)\frac{f_a}{f}[x|y,a(y)]+\mu(y)\Big\}, \tag{5.1d}$$

$$\lambda(y)=\frac{\int\{v[x-s(x,y)]+\alpha V(x)\}f_a[x|y,a(y)]\mathrm{d}x}{c''[a(y)]-\int\{u[s(x,y)]+\beta\bar{U}(x)\}f_{aa}[x|y,a(y)]\mathrm{d}x}, \tag{5.1e}$$

也就是说，(2.3) 的解必须满足这些方程。因为在一般情况下，(5.1) 没有显式解，我们打算用这个规则来找出一个数字解。这个计算程序可以得到一个快速收敛的估计且易操作。简单起见，我们假设委托人是风险中性的；一个风险规避的委托人只会增加一些计算的复杂性。我们也假设为有限期，这个假设对于数字解是必须的。

假设 3(风险中性的代理人) 代理人是风险中性的。

假设 4(有限期) Y 是有限的。

令 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和

$$a_i\equiv a(y_i),\quad s_{ij}\equiv s(y_j,y_i),\quad V_i\equiv V(y_i),\quad \overline{U}_i\equiv \overline{U}(y_i),$$
$$p_{ij}(a_i)\equiv f(y_j|y_i,a_i),\quad \mu_i\equiv\mu(y_i),\quad \lambda_i\equiv\lambda(y_i).$$

那么 (5.1) 式中离散时间的情形就是：对所有的 $i=1,2,3,\cdots,n$,

$$V_i=\sum_{j=1}^{n}(y_j-s_{ij}+\alpha V_j)p_{ij}(a_i),$$
$$\sum_{j=1}^{n}[u(s_{ij})+\beta\overline{U}_j]p'_{ij}(a_i)=c'(a_i),$$
$$\sum_{j=1}^{n}[u(s_{ij})+\beta\overline{U}_j]p_{ij}(a_i)=\overline{U}_i+c(a_i),$$
$$s_{ik}=\phi\Big[\lambda_i\frac{p'_{ij}(a_i)}{p_{ij}(a_i)}+\mu_i\Big],\quad k=1,\cdots,n,$$
$$\lambda_i=\frac{\sum_j(y_j-s_{ij}+\alpha V_j)p'_{ij}(a_i)}{c''(a_i)-\sum_j[u(s_{ij})+\beta\bar{U}_j]p''_{ij}(a_i)},$$

对于所有的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 这五个方程决定了五个变量 $(a_i,s_{i,j},V_i,\lambda_j,\mu_i)$。

从一个给定的 $s\in R^{n\times n}$ 开始，我们在五个方程的基础上分五步来计算。每一步用一个方程。

1. 给定 s, 由下式求解

$$\sum_j[u(s_{ij})+\beta\overline{U}_j]p'_{ij}(a_i)=c'(a_i),\quad i=1,\cdots,n. \tag{5.2}$$

每一个 a_i 由 (5.2) 中的一个方程单独决定。

2. 给定 a 和 s, 计算

$$V=\begin{pmatrix}1-\alpha p_{11}(a_1) & -\alpha p_{12}(a_1) & \cdots & -\alpha p_{1n}(a_1)\\ -\alpha p_{21}(a_2) & 1-\alpha p_{22}(a_2) & \cdots & -\alpha p_{2n}(a_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha p_{n1}(a_n) & -\alpha p_{n2}(a_n) & \cdots & 1-\alpha p_{nn}(a_n)\end{pmatrix}^{-1}$$
$$\cdot\begin{pmatrix}\sum_j v(y_j-s_{1j})p_{1j}(a_1)\\ \vdots\\ \sum_j v(y_j-s_{nj})p_{nj}(a_n)\end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

3. 给定 a, s 和 V, 计算

$$\lambda_i = \frac{\sum_j [v(y_j - s_j) + \alpha V_j] p'_{ij}(a_i)}{c''(a_i) - \sum_j [u(s_{ij}) + \beta \bar{U}_j] p''_{ij}(a_i)}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{5.4}$$

4. 给定 a 和 λ, 求解 μ

$$\sum_j u \circ \phi \Big[\lambda_i \frac{p'_{ij}(a_i)}{p_{ij}(a_i)} + \mu_i \Big] p_{ij}(a_i) + \beta \sum_j p_{ij}(a_i) \overline{U}_j = \overline{U}_i + c(a_i),\ i = 1, \cdots, n. \tag{5.5}$$

每一个 μ_i 由方程 (5.5) 中的方程单独决定。

5. 最后，给定 a, λ 和 μ, 计算

$$s_{ij} = \phi \Big[\lambda_i \frac{p'_{ij}(a_i)}{p_{ij}(a_i)} + \mu_i \Big], \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{5.6}$$

然后，我们可以利用第五步的信息回到第一步进行下一轮的求解。

我们可以从任何一个契约 $s_0 \in R^{n \times n}$ 开始，从上面的五步中找出 $s(1)$, 然后找到 $s(2)$, 以此类推，直到 N 步后达到稳态，也就是说， $s(N)$ 与 $s(N+1)$ 相等。有限的 s 必须满足方程 (5.1) 。通过这种方法，计算机可以迅速地找出每一步的解，如果它存在的话，并且解序列会快速的收敛。在下一小节的数字例子中，五步计算法通常在 10 轮左右收敛。

(二) 一个数字实例

我们选择 $A = R_+, Y = \{y_1, y_2\} y_1 < y_2$, 且

$$\begin{aligned}
&f(y_1|y, a) = e^{-ay}, \qquad f(y_2|y, a) = 1 - e^{-ay}; \\
&\overline{U}_1 = 10, \qquad \overline{U}_2 = 10.1; \\
&\alpha = 0.98, \qquad \beta = 0.98; \\
&u(s) = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma s}), \qquad \gamma = 3; \\
&v(y) = y; \\
&c(a) = \frac{1}{2} a^2.
\end{aligned}$$

也就是说，只有两个可能的时期 y_1 和 y_2, 即好时期和坏时期，且委托人是风险中性的。这些对数字解的函数形式的选择在契约理论中是很典型的。通过这些选择，随着努力程度 a 或过去表现 y 的增大，获得高产出 y_2 的可能性就会增大。我们还有

$$\frac{f_a}{f}(y_1|y, a) = -y, \quad \frac{f_a}{f}(y_2|y, a) = \frac{y e^{-ay}}{1 - e^{-ay}},$$

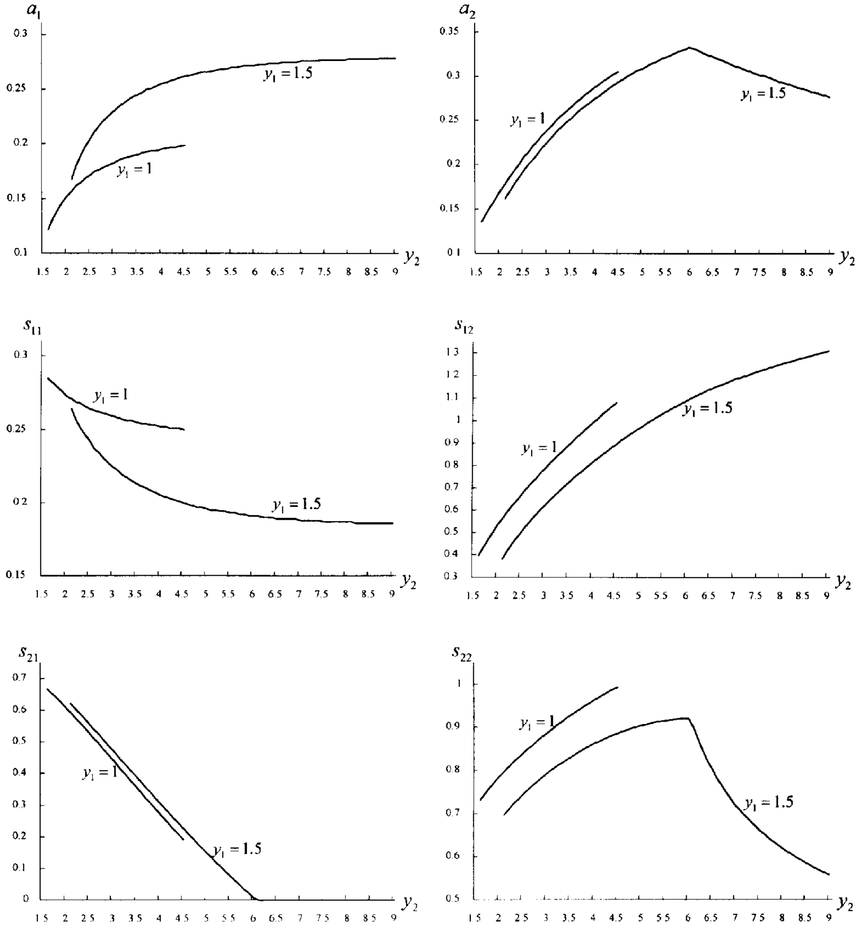
会得到 $\frac{f_a}{f}(y_2|y, a) > \frac{f_a}{f}(y_1|y, a)$, 我们也有 $h(z) \equiv \frac{1}{\gamma} \ln(z), z > 1$.

在这个基准的例子中，我们选取 $y_1 = 1$ 和 $y_2 = 2$, 解为

$$a = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.17 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0.273 & 0.533 \\ 0.610 & 0.786 \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix}39.92\\39.68\end{pmatrix},\quad \lambda=\begin{pmatrix}0.38\\0.63\end{pmatrix},\quad \mu=\begin{pmatrix}2.65\\7.49\end{pmatrix}.$$

通常，我们既可以选择 $y_1=1$ 也可以选择 $y_1=1.5$ 和一个连续的 $y_2: y_2\in(1.5,\infty)$。 a_i 和 $s_{i,j}$ 的解被描述为下面六张图中。这些图表只显示了解存在的那一部分。



对这些图表我们观察到以下几点。第一，不管经济状态是好是坏，代理人的努力程度都随着 y_2 的增加而增加；直至在坏状态接着好状态 $(y_2\to y_1)$ 时的有限责任条件强迫委托人减少在好状态接着坏状态 $(y_1\to y_2)$ 时的支付。这个结果有两个原因。既然报酬的增加可以补偿加倍努力工作的成本，那么代理人就会认为，为了状态好的时候的高产出而去努力是值得的。另外，随着两个不同状态时的绩效差距的扩大，使得委托人将产出和努力程度联系起来变得容易了。

第二，当产出连续两个时期都为坏状态时，代理人的报酬将会减少。原因可能是，两个连续的坏状态会使委托人更加认为代理人不努力工作。但是

这种情况在状态转好时就会改变。这两个时期产出的巨大反差使得委托人相信，即使在连续的两个坏状态时，糟糕的绩效也是因为经济环境不好，而不是不努力工作。既然努力程度增加一点点就可以带来绩效的大幅提高和报酬的增加，且成本几乎可以忽略，那么代理人就应该认识到这一点，并且当状态好的时候也会选择努力工作。对称的，如果有限责任条件没有限制在 $y_2 \to y_1$ 时对代理人的惩罚，代理人在 $y_2 \to y_2$ 时的报酬就会增加。

第三，如果状态从坏变到好，代理人的报酬就会显著的增加，反之，如果状态从好变到坏，代理人的报酬就会大幅下降。好的时期越好，下一期的奖励或惩罚就越重。当有限责任条件限制了对代理人的惩罚时，委托人就会减少 $y_2 \to y_2$ 时的支付来补偿在 $y_2 \to y_1$ 时的支付。

第四，在坏状态时产出 y_1 的增加会提高代理人在该状态下的努力程度，但会减少他在好状态时的努力程度。既然在坏状态时产出的增加会缩小两个时期绩效的差距，那么代理人就会在两个时期平均地分配努力程度。实质就是，两个时期的努力程度有一个替代；如果产出是更均匀的话，那么努力程度也将是更均匀的。

最后，与第四点不同，当产出在坏状态下增加时，契约的支付在 $y_1 \to y_1, y_2 \to y_2$ 和 $y_1 \to y_2$ 时会减少，但在 $y_2 \to y_1$ 时会增加。这可以通过如下事实来解释：坏状态时产出的增加会缩小两个时期绩效的差距，这将导致契约的支付在两个时期内更平均。注意到即使在坏状态时的产出增加很多，在 $y_2 \to y_1$ 时报酬的增加也是很少的。

六、结　　论

本文提出了一个基于马尔可夫过程的动态代理模型。它是现有的重复代理模型的推广。我们得出了解的方程，并讨论了解的几个特征。我们讨论了两个可以得到首选最优的特例。半线性契约是倍受人们关注的契约模型。由于静态模型的线性契约的广泛应用，我们也希望半线性动态契约也能广泛的应用于实际。然而，在普通的模型中得不到一个显式解，对静态的基本代理模型也是如此。于是我们提出来了一个计算的法则，利用它可以观察到动态契约的一些特征。

但还是有许多疑难技术问题留待解决。首先，我们需要方程 (5.1) 解的存在。这就需要找到一个产出 y 的区间，在此区间内，可以保证方程 (5.1) 有解。第二，我们只知道问题 (2.3) 的任何一个解都必须是方程组 (5.1) 的解；我们需要方程 (5.1) 解的惟一性来保证，(5.1) 的任何一个解事实上也是 (2.3) 的一个解。既然问题 (2.3) 已经被加上了非常严格的条件，因此，我们希望 (5.1) 能够在比较宽松的条件下有惟一解。第三，对这个计算法则来说，棘手的问题是迭代过程的收敛性。这也需要找到产出 y 的一个区间，使得五步计算的解是收敛的。最后，在动态模型中，既然委托人可以从过去的表现中得到许多有用的信息，正如我们的数字例子中所表明的一样，那么就有可能存在许多其他类型的首选最优契约，它们不同于重复模型中的解。

参考文献

[1] Abreu, D., D. Pearce and E. Stacchetti, "Toward a Theory of Discounted Repeated Games with Imperfect Monitoring." *Econometrica*, 1990, 58, 1040–1063.

[2] Allen, F., "Repeated Principal-Agent Relationships with Lending and Borrowing." *Economic Letters*, 1985, 17, 27–31.

[3] Atkeson, R. and R. Lucas, Jr., "On Efficient Distribution with Private Information." *Review of Economic Studies*, 1992, 59, 427–453.

[4] Bhattacharyya, S. and F. Lafontaine, "Double-sided moral hazard and the nature of share contracts." *RAND Journal of Economics*, 1995, 26, 761–781.

[5] Fudenberg, D., B. Holmstrom and P. Milgrom, "Short Term Contracts and Long Term Agency Relationships." *Journal of Economic Theory*, 1990, 51, 1–31.

[6] Green, J., "Lending and Smoothing of Uninsurable Income." in *Contractual Arrangements for Intertemporal Trade*, E. Prescott and N. Wallace, eds., University of Minnesota Press, 1987.

[7] Grossman, S. and O. Hart, "An Analysis of the Principal-Agent Problem." *Econometrica*, 1983, 51, 7–45.

[8] Holmstrom, B., "Moral Hazard and Observability." *Bell Journal of Economics*, 1979, 10, 74–91.

[9] Kim, Son-Ku and Susheng Wang, "Linear Contract and the Double Moral Hazard." *Journal of Economic Theory*, 1998, 82, 342–378.

[10] Laffont, Jean-Jacques, *The Economics of Uncertainty and Information*, Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

[11] Lambert, R. A., "Long-term Contracts and Moral Hazard." *Bell Journal of Economics*, 1983, 14, 441–452.

[12] Lockwood, B. and J. Thomas, "Asymptotic Efficiency in Hidden Information Models." *Economic Letters*, 1989, 30, 297–301.

[13] Lucas, R.E., Jr., "Asset Prices in An Exchange Economy." *Econometrica*, 1978, 46, 1429–1444.

[14] Ma, C. T., "Unique Implementation of Incentive Schemes with Many Agents." *Review of Economic Studies*, 1988, 55, 555–571.

[15] Mirrless, J., "The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization." *The Bell Journal of Economics*, 1976, 7, 105–131.

[16] Radner R., "Monitoring Cooperative Agreements in a Repeated Principal Agent Relationship." *Econometrica*, 1981, 49, 1127–1148.

[17] Radner R., "Repeated Principal-Agent Games with Discounting." *Econometrica*, 1985, 53, 1173–1198.

[18] Radner, R., "Repeated Partnership Games with Imperfect Monitoring and No Discounting." *Review of Economic Studies*, 1986, 53, 43–47.

[19] Rogerson, W., "Repeated Moral Hazard." *Econometrica*, 1985, 53, 69–76.

[20] Rubinstein, A. and M. Yaari, "Repeated Insurance Contracts and Moral Hazard." *Journal of Economic Theory*, 1983, 30, 74–97.

[21] Spear, Stephen E. and Sanjay Srivastava, "On Repeated Moral Hazard with Discounting." *Review of Economic Studies*, 1987, 54, 599–617.

[22] Stokey, N. and R. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989.

[23] Tao, Zhigang and Susheng Wang, "Foreign Direct investment and Contract Enforcement." *Journal of Comparative Economics*, 1998, 26, 761–782.

[24] Thomas, J. and T. Worrall, "Income Fluctuations and Asymmetric Information: An Example of the Repeated Principal-Agent Problem." *Journal of Economic Theory*, 1990, 51, 367–390.

[25] Townsend, R., "Optimal Multiperiod Contracts, and the Gain From Enduring Relationships Under Private Information." *Journal of Political Economy*, 1982, 90, 1166–1186.

[26] Wang, Cheng, "Dynamic Insurance with Private Information and Balanced Budgets." *Review of Economic Studies*, 1995, 62, 577–595.

[27] Wang, Cheng, "Incentives, CEO Compensation, and Shareholder Wealth in a Dynamic Agency Model." *Journal of Economic Theory*, 1997, 76, 72–105.

[28] Wang, Cheng and Stephen Williamson, "Unemployment Insurance with Moral Hazard in a Dynamic Economy." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1996, 44, 1–41.

A Recursive Dynamic Agency Model and a Semi-Linear First-Best Contract

SUSHENG WANG

(*Hong Kong University of Science and Technology*)

Abstract A recursive dynamic agency model is developed for situations where the state of nature follows a Markov process. The repeated agency model is a special case. It is found that the optimal effort depends not only on current performance but also on past performances, and the disparity between current and past performances is a crucial determinant in the optimal contract. In a special case when both the principal and the agent are risk neutral, the first best is achieved by a semi-linear contract. In another special case of a repeated version, the first best is again achieved when the discount rate converges to zero. For the general model, a computing algorithm is developed, which can be implemented in Math CAD to find the solution numerically.

JEL Classification C61, D29, D80