

金融计量的新近发展

洪永森*

摘要 这篇论文在一个统一的统计学框架内选择性地综述了时间序列金融计量学的部分最新发展。论题包括有效市场假说的检验,金融收益的预测,波动的聚类效应及溢出效应,风险值(VaR),统计密度函数预测,以及金融模型的诊断检验。对每一问题,我们讨论了合适的统计概念、模型和方法,以及它们在金融数据分析中的一些应用。

关键词 金融计量学, 密度函数预测, 有效市场

一、引言

过去十年来经济学和金融学的显著发展之一是金融计量学的产生和快速发展。金融计量学就是对金融数据进行统计分析。作为联结金融理论和实证证据的桥梁,金融计量在现代金融学中处于重要地位。它可以用于检验经济学假说和金融理论,解释重要的公认的金融现象,并对金融市场行为建模和预测。后者对金融定价、对冲以及计算金融风险都十分重要。

坚实的数学基础和大量高质量金融数据使金融计量成为经济计量学中一个独一无二的领域。本文在一个统一的统计学框架内选择性地综述了时间序列金融计量的部分最新发展。涵括的论题有有效市场假说的检验,金融收益的预测,波动的聚类效应及市场间的波动溢出效应,金融风险的度量,概率密度函数的预测,以及金融模型的诊断检验,例如对连续时间模型和分笔交易数据持续期间模型的检验。对每一问题,我讨论了适用的统计概念、模型和方法,以及它们在金融数据分析中的某些应用。

二、一个统一的统计学视角

金融理论的核心是研究经济主体在不确定的环境下,在时间及空间上配置资源的行为。时间和不确定性是影响金融市场的最重要的因素。金融计量学的一个基本公理是金融市场可以被视为一个“数据生成过程”,即服从某种概率法则的随机时间序列。¹这种概率法则可以称为经济运动法则,它完全刻画了金融市场随时间演进的动态行为,以及各金融市场之间的相互关系。

* 康乃尔大学经济学系和统计学系。通信地址: Department of Economics and Department of Statistical Science, Cornell University, 492 Uris Hall, Ithaca, NY 14850, U.S.A.; 电话: 001-607-255-5130; Email: yh20@cornell.edu。我感谢江赛春对本文的出色翻译。本研究得到美国国家科学基金会的支持,项目号: SES-0111769。文中的任何错误都由我个人负责。

¹ 确定性混沌理论已被用于研究金融市场。不同的方法均可视为对数据生成机制的近似。哪种方法更好取决于它们解释公认的金融现象和预测金融市场未来行为的能力。

在实践中金融市场的概率法则是未知的,我们仅仅能观测到金融数据,而这些数据则是未知概率法则的表现。金融计量学的主要目的就是用观测到的数据推断真实的数据生成过程,或金融市场的概率法则。由此获得的知识可以用来检验经济学假说和金融理论,解释公认的金融现象,以及预测未来的金融市场行为。

假定 $\{Y_t\}$ 是一个标量或向量金融时间序列(如股票价格变动,汇率变动和利率),具有未知的条件概率密度函数 $f(y|I_{t-1}, t)$, 这里 I_{t-1} 是在时间 $t-1$ 的可用信息集。条件密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 给出了在已知信息集 I_{t-1} 时, Y_t 在时间 t 位于无穷小区间 $[y, y+dy]$ 的概率。它完全刻画了 $\{Y_t\}$ 的动态行为,即 $\{Y_t\}$ 如何依赖于 I_{t-1} 并随时间演化。这一动态行为常被称为 Y_t 的“序列依赖(serial dependence)”。当 Y_t 是一随机向量时, $f(y|I_{t-1}, t)$ 也同时包含了 Y_t 的各个分量之间相互关系的信息,这些信息表明不同的金融时间序列在不同时间上如何相互关联。这种关联性常被称为“Granger-因果性”,它对于用其他序列预测某个序列十分重要。这里我们并未假定 $\{Y_t\}$ 序列严格平稳, $f(y|I_{t-1}, t)$ 依赖于 t 表明条件概率密度的函数形式可能是时变的,例如当存在域变(regime shift)或政策改变时。

给定 $f(y|I_{t-1}, t)$, 可以推断出 $\{Y_t\}$ 的动态过程的各个具体方面。例如条件期望:

$$\mu_t \equiv E(Y_t|I_{t-1}) = \int y f(y|I_{t-1}, t) dy;$$

条件方差:

$$\sigma_t^2 \equiv \text{VaR}(Y_t|I_{t-1}) = \int (y - \mu_t)^2 f_t(y|I_{t-1}) dy;$$

条件偏度:

$$S_t \equiv \sigma_t^{-3/2} E[(Y_t - \mu_t)^3|I_{t-1}] = \sigma_t^{-3/2} \int (y - \mu_t)^3 f(y|I_{t-1}, t) dy;$$

以及,当 Y_t 为标量时, $\alpha\%$ 条件分位数:

$$Q_t(\alpha) \equiv F^{-1}(\alpha|I_{t-1}, t),$$

此处 $F^{-1}(y|I_{t-1}, t)$ 为 Y_t 的条件累积分布函数的逆函数,即:

$$F(y|I_{t-1}, t) \equiv P(Y_t \leq y|I_{t-1}) = \int_{-\infty}^y f(x|I_{t-1}, t) dx.$$

若 $\alpha = 0.5$, $Q_t(0.5)$ 即熟悉的条件中位数。在整篇论文中,所有未加说明的积分都是对条件密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 的整个领域进行的。

这里的每一统计概念都刻画 Y_t 的动态过程的某一特定方面。通常它们是未知的,因为条件密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 是未知的。我们可以用参数或非参数方法对它们建模。通常来说,对条件期望建模要比高阶矩容易,对条件矩建模要比对整个密度函数建模容易。因此,一个重要的问题是,什么时候我们需要知道条件期望、条件方差、条件分位数,或条件密度函数?这主要取决于模型使用者的目标函数和实际的数据生成过程是什么。某些情况下,知道动

态过程的特定方面就足够了, 如条件期望和条件方差。另一些情况下, 我们可能不得不去了解整个动态过程。在下面的论述中, 我将讨论适用上述统计概念的各种金融研究情况。我们将看到, 条件期望对市场有效和收益预测是有用的, 条件方差对波动聚类 and 溢出效应建模十分有用, 条件分位数则与巨大损失的概率, 或 VaR 密切相关; VaR 是流行的金融风险的量化测度。最后, 条件密度函数对全面刻画不确定性和评价金融时间序列模型的完备性是十分重要的。

三、条件期望和市场效率

对金融收益序列建模并预测是金融学中一个长期研究的问题。一个重要的假说是随机游走假说(例如, Fama, 1970)。定义 P_t 为某一金融变量在时间 t 的价格, 例如股票价格或外汇价格。我们称 $\{P_t\}$ 服从几何随机游走, 若:

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + Y_t, \quad (3.1)$$

此处 $\{Y_t\}$ 为独立同分布 (*i.i.d.*) 随机序列。当价格变化较小时, 收益 $Y_t = \ln(P_t/P_{t-1})$ 近似等于相对价格变动 $(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ 。独立性意味着当前收益不依赖于过去的收益, 于是不可能用当前可知的信息预测未来的收益, 当前的价格已经包含所有已知信息, 市场在信息上是完全有效的。我们可以通过检验 *i.i.d.* 来检验随机游走假说, 例如时间序列计量中著名的 BDS 检验(参考 Brock, Dechert, Scheinkman & LeBaron, 1996)。

然而随机游走假说和有效市场假说并不完全相同。有效市场假说实际上是鞅假定。我们称 $\{\ln P_t\}$ 服从一个鞅过程, 若:

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + Y_t,$$

这里 Y_t 为相对于 I_{t-1} 的鞅差分序列 (*m.d.s.*), 即:

$$E(Y_t | I_{t-1}) = 0. \quad (3.2)$$

(3.2) 中的 *m.d.s.* 条件是说给定 I_{t-1} , 条件期望收益为 0。² 在这种情况下, 无法长期通过系统的交易策略获得比市场组合更高的收益——当然, 某些人靠着运气仍然有可能暂时跑赢大市。显然, 随机游走假定隐含着鞅假定但反之则并不成立(除非 $\{Y_t\}$ 是一个高斯过程)。换句话说, 若 $\{P_t\}$ 服从几何随机游走, 那么市场是有效的。但当市场有效时, P_t 未必服从随机游走。一个例子是收益 $\{Y_t\}$ 服从自回归条件异方差 (ARCH) 过程:

$$\begin{cases} Y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

² 有效市场假说有三种形式。当 I_{t-1} 仅包含 $\{Y_t\}$ 的过去历史时, (3.2) 称为弱式市场有效。当 I_{t-1} 包含 $\{Y_t\}$ 的过去历史和 $t-1$ 时的其他公开信息时, (3.2) 称为半强市场有效。而当 I_{t-1} 包含 $t-1$ 时所有可得公开信息和部分内部信息时, (3.2) 称为强市场有效。进一步的讨论参见 Campbell, Lo, MacKinlay (1997)。

在条件(3.3)下, $E(Y_t|I_{t-1})=0$, 用 I_{t-1} 是无法预测收益 Y_t 的, 市场是有效的。然而, $\{Y_t\}$ 不是一个 *i.i.d.* 过程, 因为它的条件方差 $\text{var}(Y_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2$ 取决于前期收益的平方。这样的方差序列相关无助于预测收益水平, 虽然它隐含着未来的波动可以用现在的信息进行预测。随机游走假说和鞅假定的区别表明 *i.i.d.* 检验, 如 BDS 检验, 不适用于检验有效市场假说。例如, BDS 检验将拒绝(3.3)的 *m.d.s.* 过程, 尽管这一过程符合有效市场假说。

检验有效市场假说可以用基于自相关的检验, 如 Box-Pierce-Ljung 检验(参考 Ljung & Box, 1978), 方差比 (variance-ratio) 检验 (Lo & Mackinlay, 1988), 以及频谱检验 (Durlauf, 1991)。³ 这些检验验证协方差 $\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})$ 对于大于 0 的整数 j 是否为 0。它们是合适的, 因为有效市场假说推论对于所有 $j > 0$, 有 $\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = 0$ 。在时间序列分析中, $\{Y_t\}$ 被称为“白噪声”, 若 $E(Y_t) = 0$, $\text{var}(Y_t) = \sigma^2 < \infty$, 且对于所有整数 $j > 0$, 有 $\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = 0$ 。若对于某些 $j > 0$, $\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) \neq 0$, 则存在证据推翻有效市场假说。Lo & Mackinlay (1988) 和 Durlauf (1991) 分别用方差比检验和频谱检验, 发现股票周收益序列在某些信息集下是可预测的。

然而, 白噪声和 *m.d.s.* 有巨大的差别。虽然 *m.d.s.* 是白噪声, 但白噪声序列未必是 *m.d.s.*。一个例子是非线性移动平均过程:

$$Y_t = \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (3.4)$$

其中 $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 。对于这个过程, $\text{cov}(Y_t, Y_{t-j}) = 0$ 对于所有 $j > 0$ 成立, 但 $E(Y_t|I_{t-1}) = \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} \neq 0$ 。任一基于自相关的检验都可能容易地忽略这一过程。这将导致失去某些获利的机会。

当 $\{Y_t\}$ 是高斯过程时, *i.i.d.*, *m.d.s.* 和白噪声的概念是相同的。然而, 绝大部分金融时间序列都是非高斯过程。特别地, 它们的分布呈现厚尾 (heavy tail) 现象。这里, *i.i.d.*, *m.d.s.* 和白噪声的区分是重要的。我们需要新的合适的统计工具来检验市场有效。在最近的进展中, Hong (1999) 发展了一个适用于线性和非线性时间序列的分析工具。基本的思想是首先把原序列 Y_t 通过一个复指数函数变换:

$$Y_t \rightarrow \exp(iuY_t), \quad -\infty < u < \infty, \quad i = \sqrt{-1},$$

然后考虑变换变量 $\exp(iuY_t)$ 与 $\exp(ivY_{t-j})$ 的协方差:

$$\sigma_j(u, v) \equiv \text{cov}(e^{iuY_t}, e^{ivY_{t-j}}), \quad (3.5)$$

直接由代数可得,

$$\sigma_j(u, v) = \varphi_j(u, v) - \varphi(u)\varphi(v),$$

其中 $\varphi(u) \equiv E(e^{iuY_t})$ 和 $\varphi_j(u, v) \equiv E(e^{iuY_t + ivY_{t-j}})$ 分别是 $\{Y_t\}$ 的边际和成对联合特征函数。对于所有 (u, v) , $\sigma_j(u, v) = 0$, 当且仅当 Y_t 和 Y_{t-j} 相互独立。

³ 弱平稳时间序列的谱函数是其自相关函数的傅立叶变换。谱函数和自相关函数包含着序列相关的同样信息。

这样, $\sigma_j(u, v)$ 可以刻画 $\{Y_t\}$ 中所有的成对序列依赖, 包括那些零自相关的过程。并且, $\sigma_j(u, v)$ 并不需要关于 $\{Y_t\}$ 的任何矩条件。

广义的协方差阵 $\sigma_j(u, v)$ 更适用于检验随机游走假说, 而非有效市场假说, 因为它可以探测任一成对的序列依赖, 包括 (3.3) 中的 *m.d.s.* 序列。然而, 我们可以通过 $\sigma_j(u, v)$ 的微分来检验有效市场假说。定义 $\sigma_j(u, v)$ 的 (m, l) 阶导数:

$$\sigma_j^{(m, l)}(u, v) \equiv \frac{\partial^{m+l}}{\partial u^m \partial v^l} \sigma_j(u, v),$$

此处 $m, l \geq 0$ 。则 $(1, 0)$ 阶导数在 $(0, v)$ 处的值为:

$$\sigma_j^{(1, 0)}(0, v) = \text{cov}(iY_t, e^{ivY_{t-j}}). \quad (3.6)$$

在某些正则条件下, 对于所有 v , $\sigma_j^{(1, 0)}(0, v) = 0$, 当且仅当 $E(Y_t | Y_{t-1}) = 0$ 。这样, 基于 $\sigma_j^{(1, 0)}(0, v)$ 的检验比基于自相关的检验更适合于检验有效市场假说。它可以探测出 (3.4) 中的非线性移动平均过程, 但不会错误地拒绝 (3.3) 中的 *m.d.s.* 过程。⁴

不同于股票价格的是, 大多数研究发现多数外汇汇率变动近似为白噪声过程。其中许多研究得出结论认为外汇市场近似有效并把重点放在了对波动的建模上。Hong & Lee (2000) 发现在五种主要的货币——英镑、加元、德国马克、法国法郎和日元——对美元的汇率中, 三种(英镑、德国马克和法国法郎汇率的日变动)服从白噪声过程。然而, 使用一种基于 (3.6) 中 $\sigma_j^{(1, 0)}(0, v)$ 的新检验, Hong & Lee 发现所有五种汇率过程都并非鞅过程。在外汇汇率变动的条件期望中存在可预测的部分, 但这些可预测部分的性质十分复杂且是未知的。使用人工神经网络模型和其他非参数或非线性模型, Hong & Lee (2000) 发现对大多数汇率, 很难在样本外区间条件期望预测上得到比鞅模型更好的结果。这一结论与早些时候 Meese & Rogoff (1982) 的发现类似, 他们发现在汇率变动样本外区间的条件期望预测上, 鞅模型比多数经济结构模型表现更好。Diebold & Nason (1990) 和 White (1988) 使用非参数模型, 针对汇率和 IBM 股票价格的变动同样得出了类似的结论。很显然, 样本区间内显著的市场非有效的证据和非线性或非参数模型在样本外区间条件期望预测上难以优于鞅模型这两个事实是令人迷惑的, 值得进一步研究。

既然预测金融收益序列的条件期望是如此困难, 一些研究者就转而研究预测价格变动的方向。这也许可以视为一种次优选择, 但它同样是非常重要的。例如, 如果可以正确地预测股价变动的方向, 共同基金的经理则可以依

⁴ 实际上, 流行的 $\text{cov}(Y_t, Y_{t-j})$ 是 $\sigma_j(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 处的一阶导数, 即 $\sigma_j^{(1, 1)}(0, 0) = \text{cov}(Y_t, Y_{t-j})$ 。其他适当阶数导数描述了序列相关的不同方面。例如, $\sigma_j^{(2, 0)}(0, v) = \text{cov}(Y_t^2, e^{ivY_{t-j}})$ 能刻画平方收益的序列相关(即: 波动聚类); $\sigma_j^{(1, 2)}(0, v) = \text{cov}(Y_t, Y_{t-j}^2)$ 检验了当前波动是否依赖于过去的收益水平, 即所谓的期望 ARCH 效应。这一效应当金融收益的条件分布非对称时可能发生。直觉上, 广义的 $\sigma_j(u, v)$ 可以刻画一般序列依赖, 而其各阶导数则着重于描述序列依赖的某些特定方面。Hong(1999) 发展了基于各阶 (m, l) 检验的渐近理论。

时调整投资组合的构成,从而取得更好的回报。我们称股价变动方向是可预测的,若

$$E[1(Y_t > 0)|I_{t-1}] \neq E[1(Y_t > 0)],$$

此处 $1(Y_t > 0)$ 是计数函数,当 $Y_t > 0$ 时取值为 1,否则取值为 0。显而易见,当在信息集 I_{t-1} 下股价变动方向不可预测时,转换序列 $\{1(Y_t > 0)\}$ 是一个 *i.i.d.* 贝努里 (Bernoulli) 序列。存在有限的证据表明预测股价变动方向比预测其条件期望更容易,但尚没有很好的计量模型可以预测股价变动方向。

四、条件方差和波动

波动是一个关键的金融变量。大多数金融时间序列表现出波动聚类行为,即大的波动之后通常紧接着另一大的波动,而较小的波动则紧接着另一较小的波动。Engle (1982) 提出了 ARCH(q) 模型以刻画波动的这种序列相关:

$$\begin{cases} Y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j Y_{t-j}^2 \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, 1), \end{cases} \quad (4.1)$$

此处 $\alpha_j > 0$, 对于 $0 \leq j \leq q$ 。模型 (3.3) 是一个 ARCH(1) 过程。

在早期的发展阶段, ARCH(q) 常使用普通最小二乘法 (OLS) 进行估计,然而并非所有参数估计都能保证非负。负的参数估计值将使 σ_t^2 的条件方差解释无效。为避免这种困难, Engle (1982) 考虑了一个对不同滞后阶赋予线性衰减权重的 ARCH (q) 模型。这一方法被 Bollerslev (1986) 批评为“拟合 (*ad hoc*)”,后者提出了 GARCH(p, q) 模型:

$$\begin{cases} Y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j Y_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, 1), \end{cases} \quad (4.2)$$

GARCH 模型通过让数据决定合适的参数值,使权重有更大的弹性。Nelson & Cao (1992) 推导出保证 σ_t^2 非负的合适的参数限制。

GARCH(p, q) 模型假定当前的波动取决于其过去的历史。我们可以允许当前波动不但取决于过去波动的幅度而且取决于其正负,换句话说,波动亦可能取决于过去波动的水平。这被称为“杠杆效应”,与经济行为人常对利空消息反应强于利好消息这一通常看法相一致。为刻画这种不对称效应, Nelson (1991) 提出了指数 (Exponential) GARCH 模型, Glosten, Jahannathan & Runkle (1993) 提出了 Threshold GARCH 模型。经验证据表明“杠杆效应”在多数金融市场中是显著的。

价格变动依赖于过去的波动同样是可能的。这一观点主要来源于波动是风险的一种度量,而超常回报与风险水平成正比这一事实。这被称为期望

ARCH (ARCH in mean) 效应。虽然这一观点在直觉上很吸引人,但对大多数(并非全部)金融市场而言,并不存在非常显著的期望 ARCH 效应。

作为一个公认的事实,大多数金融时间序列呈现“厚尾”现象。它们的边际分布通常有较大的峰度(kurtosis)。扰动项 ε_t 的正态假设可以解释非正态的边际分布从而部分解释超常峰度,但它无法解释所有的超常峰度。一个常用的替代分布是 t 分布 $t(v)$, 这里 v 为自由度;另一替代分布是 Levy 分布,这一分布常被用在数理金融和物理学上。在实际研究中,我们可以在高斯扰动的假设下估计条件期望和条件方差模型的参数值,这一方法被称为准最大似然估计(Quasi-MLE)。准最大似然估计可以给出条件期望和条件方差模型参数的一致估计,但除非真实的扰动项分布是高斯分布,否则这些估计量并不是最有效的。Engle & Gonzalez-Rivera (1993) 使用了一种非参数方法“平滑核密度函数估计”来估计 ε_t 的密度函数。之后他们用估计出的扰动项分布来估计模型参数。这些参数估计在渐近意义上是最有效的。关于非参数核估计,可参考 Silverman (1986) 和 Hardle (1990)。

对于把 σ_t^2 解释为 Y_t 的条件方差, *i.i.d.* 假定是一个充分条件但非必要条件。假定 ε_t 服从 *i.i.d.* 条件的 GARCH 模型被称为强式 GARCH 模型。事实上,对 ε_t 而言 *m.d.s.* 假定似乎更为合适,这种假定下的 GARCH 模型被称为弱式 GARCH 模型。对一致参数估计, *i.i.d.* 或 *m.d.s.* 假定并无差别,但对模型的高阶特性,这两个假定则有显著不同的影响,例如条件偏度和条件峰度,或计算分布的尾部特性。尾部特性对于风险度量是重要的。Hansen (1994) 提出了 ε_t 分布参数取决于过去信息集 I_{t-1} 的 GARCH 模型, Gallant & Tauchen (1989) 考虑了一个半非参数模型,其中 ε_t 的分布密度函数亦取决于 I_{t-1} 。

波动与信息流动的速率密切相关。研究者常常可以从另一市场的波动变化中推断某一市场与波动相关的信息。为研究不同市场间波动的相互关系(例如我国 A 股市场和 B 股市场的信息互动),我们可以使用一个多变量 GARCH 模型,在这一模型中考虑 Y_t 的各分量之间的条件偏相关。Baillie & Bollerslev (1989) 和 Engle, Ito & Lin (1990) 采用了这样的多变量 GARCH 模型考查外汇市场之间的波动溢出(volatility spillover)效应。Cheung & Ng (1996) 和 Hong (2001) 发展了不同的统计方法来检验不同市场间的波动溢出效应。

GARCH 模型一个潜在的缺点是它通常只解释了波动聚类的一小部分。并且某一时间巨大的异常收益可能导致参数估计不稳定,这在预测波动时将产生过度的影响。波动建模的一个替代途径是采用随机波动(stochastic volatility)模型,在那里 σ_t^2 是无法观测的随机过程(参考 Campbell, Lo & Mackinlay, 1997)。

五、条件分位数和 VaR

在金融学里,波动作为度量金融风险的标准被广泛使用,尤其是市场风险。⁵但这种对称的度量方法既有优点也有缺点。在实践中,风险显然只与亏损而非与利润相关,这样一种损益对称的风险度量和我们对风险的直觉相悖。一个合理的风险度量应该与巨大的损失相联系起来。巨大的市场衰退可能导致金融机构和金融企业破产,金融体系崩溃,甚至导致社会不稳定。著名的例子如1987年美国的股灾,1997-1998年亚洲金融危机,长期资本管理公司的破产,以及最近的9.11恐怖袭击后美国股市的巨幅下滑。

近来一个新的概念,风险值(value at risk),或巨大损失概率被提出并用于度量金融风险(参考Duffie & Pan, 1996; Jorion, 2000)。⁶对于给定的时间范围 τ 和置信水平 $1-\eta$, VaR是在时间 τ 内以概率 η 发生的损失。在统计意义上, VaR(以 V_t 表示)是 Y_t 的条件分布的 η -分位数:

$$P(Y_t < V_t | I_{t-1}) = \eta. \quad (5.1)$$

显然, V_t 取决于水平 η 。国际清算银行(BIS)规定,为衡量银行资本充足度, $\eta = 0.01$, $\tau = 10$ 天。许多公司在内部使用隔夜 VaR,不同于通常要求向监管者披露的两星期标准。水平 η 的选择远非统一,例如J.P.摩根,在日 VaR 计算中采用95%水平,而Banker Trust则用99%水平。

一个重要的问题是 VaR 建模。J.P. 摩根提出了一个流行的风险矩阵模型:

$$\begin{cases} Y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} Y_{t-j}^2 \\ \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, 1), \end{cases} \quad (5.2)$$

这里参数 λ 度量当前波动依赖于其历史的程度。 λ 越大,依赖性越强。对日金融数据, J.P. 摩根建议 $\lambda = 0.94$ 。这里没有涉及任何参数估计问题。事实上,模型(5.2)是一个特殊的 Integrated GARCH(1,1)模型。

在(5.2)模型下,易导出 VaR:

$$V_t = \sigma_t z_\eta, \quad (5.3)$$

这里 z_η 是 $N(0,1)$ 的单边 η -临界值。例如,对应于 $\eta = 0.05, 0.01$; $z_\eta = 1.65, 2.33$ 。

风险矩阵对 Y_t 的整个条件概率密度建模,然后计算 η -分位数。这一方法在实践中很方便且颇为流行。然而,这一方法可能因为潜在的分布假定错误而产生问题,例如关于 Y_t 的动态行为, *i.i.d.*假定和 ε_t 的非正态性等。

⁵ 金融风险包括不同的形式,如市场风险,信用风险,流动性风险和操作风险等。

⁶ 经济学家们已考虑了银行和保险公司的行为模型,在模型中这些行为人在 VaR 类型的偿付约束下最大化某种效用准则(例如, Gollier, Koehl & Rochet, 1997; Sentamero & Babbel, 1996)。他们还考虑了“安全第一”的投资组合选择,作为传统的均值-方差有效前沿的替代模型,它在损失风险约束(downside risk constraint)下最大化期望收益(例如, Levy & Sarnet, 1972; Arzac & Bawa, 1977; Jansen, Koedijk & Vries, 2000)。

Engle & Manganlli (1999) 在最近提出了一族 VaR 模型, 称为 CAViaR, 即条件自回归 VaR。CAViaR 模型的一个简化形式是:

$$V_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j V_{t-j}, \quad (5.4)$$

这个模型假定 VaR 是自相关的。在 (5.4) 里, 当期的 VaR 取决于最近 q 期滞后的 VaR, 没有作分布的假定。Engle & Manganlli (1999) 提出了一种分位数方法来估计 (5.4) 中的未知模型参数 $\{\alpha_j\}_{j=0}^q$ 。他们把这一族 CAViaR 模型应用于股票市场。CAViaR 建模的一个优点是并不必要对整个条件概率密度建模, 因此避免了潜在的分布假定错误。但因为它仅使用了在分布尾部的观测数据, 所以合理的参数估计需要一个大样本。而对 $\eta = 0.01$, 我们仅可以预期平均每 4 年出现 10 个日超出值 (即, 实际损失超过 VaR)。

研究者, 金融机构经理, 监管人员和政策制定者都非常关心 VaR 模型的正确性。举个例子, 对 VaR 的过低估计将使金融机构和金融企业持有过低的风险资本, 从而面临过高的风险。对 VaR 模型的诊断检验被称为“向后检验”。在 VaR 发展的早期文献中, 一个简单的检验被用来检查实际发生的 VaR 超出值比例是否异于设定的 η 值。如果超出值比例显著地异于 η , 我们就可以拒绝 VaR 模型的正确性。

但这个简单的检验仅考虑了在长期中 VaR 超出值的平均数目, 并未考虑可能的 VaR 超出值序列的聚类情况, 而这也是同样重要的 (参考 Christoffersen, 1998)。如果 VaR 模型正确的话, 任何时间 $t-1$ 的信息集 I_{t-1} 对预测时间 t 的 VaR 超出值概率没有帮助。一个不正确的 VaR 模型却可以很好地预计长期平均的 VaR 超出值, 但这些 VaR 超出值可能在时间上强烈地聚类。这种情况下, 我们有可能改进 VaR 模型, 以更好地预测 VaR。

Engle & Manganlli (1999) 提出了一种 VaR 模型诊断检验。他们采用 VaR 超出值计数函数:

$$Z_t(\theta) \equiv 1[Y_t > -V_t(\theta)], \quad (5.5)$$

此处 θ 是 VaR 模型中的参数。当 VaR 模型设定正确时, 亦即存在某个 θ_0 , 有 $V_t(\theta_0) = V_t$ 时, $\{Z_t = Z_t(\theta_0)\}$ 成为一个 *i.i.d.* 贝努里序列。任一违背 *i.i.d.* 贝努里性质的证据都表明 VaR 模型是不正确的。Engle & Manganlli (1999) 考虑了一个辅助回归:

$$Z_t(\hat{\theta}) - \eta = \sum_{j=1}^p \beta_j [Z_{t-j}(\hat{\theta}) - \eta] + v_t, \quad (5.6)$$

此处 $\hat{\theta}$ 是 θ_0 的一致估计。他们使用检验统计量 TR^2 检验回归参数 $\{\beta_j\}_{j=1}^p$ 是否联合为零。其中 T 是样本个数, R^2 是 (5.6) 回归中多重相关系数的平方。Engle & Manganlli (1999) 推断其渐近分布是自由度为 p 的开方分布。但是, 如 Engle & Manganlli (1999) 所指出那样, 这个渐近分布是无效的, 因为它没有考虑参数估计 $\hat{\theta}$ 的不确定性对检验统计量的影响。产生这种不确定性的原

因是我们并不知道真实的参数值 θ_0 , 并不得不在有抽样误差的情况下用数据进行估计。无论样本规模 T 有多大, 这种影响始终存在且不能忽略。对检验统计量 TR^2 渐近分布的修正尚未被推导出来。

像其他时间序列模型一样, 一个 VaR 模型可以有很好的样本内拟合但样本外预测效果很差。这种现象可能归因于模型设定时的“数据挖掘 (data-mining)”, 或归因于数据生成过程的域变。于是评估 VaR 模型的样本外预测能力变得很重要。Christoffersen (1998) 首先提出一个似然比检验方法 (likelihood ratio test) 来检验 VaR 模型的样本外预测能力, 并在研究汇率市场时应用了这一模型。Christoffersen (1998) 实际假定真实的参数值 θ_0 是已知的, 类似于 Engle & Manganlli (1999), 他的检验也没有考虑样本内参数估计的不确定性对似然比检验统计量的影响。

对控制金融风险很重要的一件事是不同资产或市场间风险的转移。一个例子是“市场传染”, 由于投资者试图推断其他市场的价格变动而发生, 在这种情况下, 一个市场的价格变动可能引致其他市场的价格变动, 而不管各市场的基本面状况如何 (例如, King & Wadhvani, 1990)。另一情况也是可能的, 即某个市场的风险是局部产生的或者有其特定特征, 但由于金融市场之间的紧密结合, 风险会被传播到另一市场。例如, 日本股票市场上由其国内原因引起的衰退可能导致日本股东, 包括日本银行的财富损失。在国际清算银行的监管条例下, 这种损失会降低日本银行的资本金并导致日本银行在美国资本市场上的信贷行为缩减 (参考 Peek & Rosengren, 1997)。

为研究各个市场间的风险转移, Hong (2001) 在风险的 VaR 度量里引入了一个新的 Granger 因果性概念。一个市场的风险被称为在 Granger 意义上导致了另一市场的风险, 若一个市场的 VaR 超出值可以帮助预测另一市场未来的 VaR 超出值。众所周知, Granger 因果性 (参考 Granger, 1969, 1980) 并非“原因”和“后果”之间的关系, 而是定义在预测能力增强的意义上的。Hong (2001) 使用小波方法发展了一套统计办法以检验 VaR 风险的 Granger 因果性假设, 其思想是考查两个市场的巨大损失概率是否在不同时间上存在偏相关关系。小波分析是最近十年来发展起来的一种新的数学工具, 它对于刻画经济学中的非平滑特征尤其有用 (参考 Hong & Lee, 2001; Lee & Hong, 2001)。

六、密度预测

样本外预测是时间序列经济计量学的核心问题。传统样本外预测大多集中于点预测及其评估 (例如, Granger, & Newbold, 1987)。直到最近为止, 概率密度预测及其评估没有受到多大重视 (参考 Tay & Wallis (2000) 的综述)。概率密度预测是在时间 $t-1$ 时使用可有信息对 Y_t 的整个密度函数进行预测, 一个例子是预测“明天的 IBM 股价变动服从期望为 0 标准差为 5% 的正态分布”。

为什么对整个密度函数的预测很重要呢?众所周知,概率密度最好地描述了不确定性(参考 Rothschild & Stiglitz, 1970)。当 Y_t 服从高斯分布时,不确定性完全由方差刻画。在非高斯情况下,波动就不足以完整地刻画不确定性的特征, VaR 度量同样不能。

Diebold, Gunther & Tay (1998), Granger (1999) 和 Grange & Pesaran (2000) 从决策理论角度说明了预测概率密度及其评估的必要性。假定一个决策者在时间 $t-1$ 时作决策选择行动 a , 面临损失函数 $L(a, Y_t, t)$ 。损失函数度量了由于在时间 $t-1$ 的预测偏离在时间 t 发生的实际结果 (Y_t), 决策者所承受的损失或惩罚。这个损失或惩罚取决于行动 a 。决策者将选择一个最优行动 a_0 以最小化期望损失:

$$a_0 \equiv \arg \min_a \int L(a, y, t) p(y|I_{t-1}, t) dy, \quad (6.1)$$

此处 $p(y|I_{t-1}, t)$ 是决策者对 Y_t 的真实条件概率密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 的预测。当 $L(a, Y_t, t)$ 表示平方损失函数, 亦即 $L(a, Y_t, t) = (y - a)^2$ 时, 我们有:

$$a_t^* = \int y p(y|I_{t-1}, t) dy \equiv \mu_t(p).$$

在这种情况下, 决策者只需要知道 Y_t 的条件期望。当 $L(a, Y_t, t) = \exp[\alpha(y - a)] - 1 - \alpha(y - a)$, 即所谓的 linex 函数, 且 $\{Y_t\}$ 服从条件高斯分布时, 则:

$$a_t^* = \int y p(y|I_{t-1}, t) dy + \frac{\alpha}{2} \int [y - \mu_t(p)]^2 p(y|I_{t-1}, t) dy,$$

它是 $p(y|I_{t-1}, t)$ 的条件期望和条件方差的线性组合。

当损失函数 $L(a, Y_t, t)$ 不是 $y - a$ 的对称函数时, 最优行动 a_0 通常取决于整个条件密度函数 $p(y|I_{t-1}, t)$ 。最初的几阶矩是不充分的, 这种情况下, 密度函数预测对决策就变得必要了。在宏观经济学中, 对通货膨胀、产出和失业率的密度预测令人感兴趣(例如, Diebold, Tay & Wallis, 1999; Clements & Smith, 2000)。这些密度预测有助于政策制订者制定合适的政策, 如控制通货膨胀。在金融领域里, 广泛应用于投资组合、公司债券预期回报率和金融流动性度量的现代风险控制技术也涉及到密度函数的预测。这种预测对资产和资本配置有着实实在在和不可忽略的影响。此外有关从期权价格中推导出密度函数预测的文献也日渐增多(如 Ait-Sahalia & Lo, 1998), 这些密度函数预测包含着关于市场投资者折现因子的有用信息。

当密度预测模型 $p(y|I_{t-1}, t)$ 与未知的真实条件概率密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 相吻合时, 在以下意义上密度函数预测是最优的: 即相比于任一密度预测模型 $p(y|I_{t-1}, t)$, 不管他们的损失函数是什么, 所有决策者都偏好真实条件概率密度 $f(y|I_{t-1}, t)$:

$$\min_a \int L(a, y, t) f(y|I_{t-1}, t) dy \leq \min_a \int L(a, y, t) p(y|I_{t-1}, t) dy. \quad (6.2)$$

模型设定错误是非最优预测的主要原因。对密度预测质量的评估本身是很重要的, 并有助于未来预测的改进。对于点预测, 已有大量的文献讨论对

“事前”预测的“事后”评估,并发展了多种新颖的方法(例如, Granger & Newbold, 1987; Clements & Hendry, 1998, 1999)。而密度预测虽然正日益普及,文献中涉及的用于评估密度预测的统计工具却为数很少。

解决密度预测评估的问题是件令人生畏的任务。Granger (1999) 和 Granger & Pesaran (2000) 讨论了某些基于决策的方法来评估密度预测。目前可用的密度预测评估方法是 Diebold (1998) 和 Berkowitz (2000) 的检验。Diebold (1998) 基于密度预测模型 $p(y|I_{t-1}, t)$, 考虑了一系列数据的概率积分变换:

$$Z_t \equiv \int_{-\infty}^{Y_t} p(y|I_{t-1}, t) dy. \quad (6.3)$$

当 $p(y|I_{t-1}, t)$ 与真实条件密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 相符时, 序列 $\{Z_t\}$ 服从 *i.i.d.* $U[0, 1]$ 。这一结论由 Rosenblatt (1952) 在一个简单的情况下导出, 已被 Diebold (1998) 和 Elerian, Chib & Shephard (2000) 应用于经济计量学。直觉上, *i.i.d.* 表明对 Y_t 的动态行为建模是正确的, 而均匀分布 $U[0, 1]$ 则表明 Y_t 的边际分布设定是正确的。于是 *i.i.d.* $U[0, 1]$ 性质提供了评估密度预测的有力方法。如果 $\{Z_t\}$ 不服从 $U[0, 1]$, 那么 $p(y|I_{t-1}, t)$ 就不是最优的密度预测模型。在统计学里, Z_t 被称作“广义残差”。

Diebold (1998) 的做法基于自相关 $\text{cov}(Z_t^m, Z_{t-j}^m)$, $m = 1, 2, 3, 4$ 。这个方法对检验密度预测是否最优是方便而有用的。然而, 正如本文第三节讨论的那样, 基于自相关的检验可能忽略某些在实践中重要的非线性过程, 因而十分需要能探测出广泛非最优密度预测的综合性方法。Hong (2000) 提出了这样一个综合性密度预测评估方法。特别地, Hong 使用 (3.5) 中 $\sigma_j(u, v)$ 的一个修正版本来检验 $\{Z_t\}$ 的 *i.i.d.* $U[0, 1]$ 性质。修正的协方差综合了 $U[0, 1]$ 信息, 可以探测任一成对序列依赖及对 $U[0, 1]$ 的偏离。不同于现有的密度预测评估方法, Hong (2000) 考虑了参数估计的不确定性对检验统计量的影响。为找到可能的非最优密度预测的原因, Hong (2000) 进一步导出了一些推断方法, 可以刻画密度预测不正确性的各个特定方面。这些方法被用于 S&P 500 日收益序列以评估各种流行的密度预测模型, 包括 J.P. 摩根 (1996) 的风险矩阵模型和各种 GARCH 模型。每个模型的预测都不是最优的, 而综合评估方法可以对各种模型的优劣排序。特别地, 一个有 GARCH(1,1) 和 $t(v)$ 扰动项的 *m.d.s.* 模型比一个 GARCH(1,1) 和 $t(v)$ 扰动项的移动平均模型要好, 虽然后者有在样本内非常显著的移动平均构成部分。

七、连续时间扩散模型

到目前为止我们的讨论集中于离散时间序列。在现代金融学中, 连续时间模型被广泛用于描述重要经济变量的动态过程, 如利率, 汇率和股价。著名的 Black & Sholes (1973) 期权定价模型, Cox, Ingersoll & Ross (1985) 和 Heath, Jarrow & Morton (1992) 的期限结构模型均假定真实金融变量服从一个扩散过程。使用连续时间模型的一个主要原因是, 在一个开放的市场环境下, 新

的未预期的信息是连续到来的, 经济决策者面临着市场的随机瞬时变动。用定义在连续时间上的随机变量可以很好地描述真实金融变量。⁷

考虑一个平稳马尔可夫单因子连续时间模型:

$$dY_t = \mu(Y_t, \theta)dt + \sigma(Y_t, \theta)dW_t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (7.1)$$

此处 $\mu(Y_t, \theta)$ 和 $\sigma(Y_t, \theta)$ 分别是 Y_t 的漂移和扩散 (即波动) 项, W_t 是标准布朗运动。经济理论通常没有建议扩散模型的具体函数形式。研究者常考虑某种可以方便导出证券和期权价格解析解的特殊函数形式。一个著名的例子是 Vasicek (1977) 模型:

$$dY_t = \kappa(\alpha - Y_t)dt + \sigma dW_t, \quad (7.2)$$

此处 α 是“均衡利率水平”, κ 描述了对于均衡水平 α 的均值回复强度, 而 σ 是波动水平。在利率期限结构建模中这个模型非常流行, 它通过如下公式来给到期时间 T_0 的债券定价:

$$\begin{aligned} B(t, t) &= E \left[\exp \left(- \int_t^{T_0} Y_t dt \right) | Y_t \right] \\ &= Y_t + (\alpha - Y_t)(1 - e^{-\kappa T_0}) - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-\kappa T_0})^2, \end{aligned} \quad (7.3)$$

此处条件期望代表在当前和到期时间 T_0 之间, 对点利率的历史的平均。

在 (7.2) 中, 扩散项 σ 是时间恒定的。为刻画时变 (time-varying) 波动, 我们可以采用 Cox, Ingersoll & Ross (1985) 模型:

$$dY_t = \kappa(\alpha - Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t}dW_t \quad (7.4)$$

此处扩散项 $\sigma(Y_t, \theta) = \sigma\sqrt{Y_t}dW_t$ 和利率水平 Y_t 的平方根成正比。点利率水平越高, 波动越大。

一个重要的问题是如何通过离散的观测样本 $\{Y_{t\Delta}\}_{t=1}^n$ (n 个样本值, Δ 为抽样频率, 如日或周), 来估计模型 (7.2) 或 (7.4) 中的未知参数。不同于在离散时间模型下, 条件期望和条件方差不足以决定条件概率密度, 连续时间模型 (7.1) 中的漂移和扩散项完全决定了条件概率密度, 即模型 (7.1) 中所谓的“转移概率密度 (transition density)”。这样我们就可以应用极大似然估计 (MLE)。然而, 极大似然估计需要明确的转移概率密度函数形式。对模型 (7.2) 和 (7.4), 转移概率密度有明确的解析解, 所以极大似然估计是方便且有效的。然而, 许多连续时间模型并没有解析形式的转移概率密度, 这使得连续时间模型的估计相当富有挑战性。

过去十年中连续时间模型的最显著发展之一是模型估计技术的创新 (参考 Sundaresan, 2001)。相关文献的一个主要重点是发展严格的计量方法, 以使用离散的观测数据来估计连续时间模型。这很大程度上源于 Lo (1998) 的发现, 他发现连续时间模型的离散近似可能导致不一致的参数估计。在许多估计方法中, 可用的如 Ait-Sahalia (1996) 的非参数估计, Duffie & Singleton

⁷ 处理这样的随机变量的数学工具是随机微分。随机微分的一个技术上的优点是在连续时间上, 一个非常复杂的随机变量可以用简单的结构刻画。

(1993)的模拟矩方法, Gallant & Tauchen (1996a)的有效矩方法, Hansen & Scheinkman (1995)的广义矩估计, 以及 Lo (1988)和 Ait-Sahalia (2001)的极大似然估计。对这些估计量的渐近性质已经有了很好的描述, 基于渐近理论的统计推断程序也已被完善地发展起来。其中的某些方法可以用于连续时间向量模型, 即使 Y_t 中的某些分量是不可观测的。

文献里已有多种连续时间模型。哪一种模型能最好的刻画金融变量, 比如说点利率的动态行为呢? 正确连续时间模型对利率衍生工具的定价、对冲以及计算金融风险都十分重要。Ait-Sahalia (1996) 基于如下事实提出了一种对模型 (7.1) 的非参数检验: 一对漂移和波动模型 $\mu(Y_t, \theta)$ 和 $\sigma(Y_t, \theta)$ 完全决定了 Y_t 的边际概率密度:

$$\pi(y, \theta) = \frac{\xi(\theta)}{\sigma^2(y, \theta)} \exp \left[\int_{y_0}^y \frac{2\mu(u, \theta)}{\sigma^2(u, \theta)} du \right], \quad (7.5)$$

此处 $\xi(\theta)$ 是标准化因子以保证 $\pi(y, \theta)$ 对每一 θ 归一化为 1, y_0 是 Y_t 的下界。Ait-Sahalia (1996) 用一个二次形式比较了模型的边际密度函数估计 $\pi(y, \hat{\theta})$ 和非参数密度函数估计 $\hat{\pi}_0(y)$:

$$M \equiv \int_{y_0}^{y_1} \left[\hat{\pi}_0(y) - \pi(y, \hat{\theta}) \right]^2 \hat{\pi}_0(y) dy, \quad (7.6)$$

此处 y_1 为 Y_t 的上界, $\hat{\theta}$ 是 θ 的最小离差估计, $\hat{\pi}_0(y)$ 是非参数核估计。核估计 $\hat{\pi}_0(y)$ 不需要正确设定 $\mu(Y_t, \theta)$ 和 $\sigma(Y_t, \theta)$ 的函数形式, 而能收敛到 Y_t 的真实边际分布 $\pi_0(y)$ 。当然, 一个代价是它收敛到真实分布的速度较慢, 所以对合理的非参数密度函数的估计, 我们需要一个大样本。

当 $\mu(Y_t, \theta)$ 和 $\sigma(Y_t, \theta)$ 模型设定正确时, 统计量 M 很接近于 0, 因为 $\pi(y, \hat{\theta})$ 和 $\hat{\pi}_0(y)$ 收敛于同一极限 $\pi_0(y)$ 。大的 M 值则成为模型设定错误的证据。 M 值多大才可以被认为是“显著地大”需要通过渐近理论来判断。

Ait-Sahalia (1996) 的基于边际密度的检验简单且易于实现。它对错误的模型设定有检验效力, 只要这种错误的模型设定使得模型的边际分布 $\pi(y, \theta)$ 不同于真实的边际分布 $\pi_0(y)$ 。在对 7 天期的欧元点利率的研究中, Ait-Sahalia (1996) 拒绝了所有线性漂移模型, 并发现拒绝的主要原因是漂移的非线性。点利率过程在均值附近像是随机游走 (亦即, 零均值回复), 但在很低或很高的点利率水平时则呈现高度非线性。

然而, 最近的研究指出, 这一检验的一些局限使其在实证研究中的有效性存在疑问。在一项模拟研究中, Pristker (1998) 发现 Ait-Sahalia (1996) 检验在利率持久相关的情况下表现较差。Chapman & Pearson (2000) 也发现文献中的非参数估计存在“边界偏差”问题: 在观测值的边界附近它们可能产生有偏估计, 导致伪非线性漂移。

Hong & Li (2001) 提出了一种针对扩散模型的新的非参数模型设定检验。他们比较了非参数转移概率密度和模型的转移概率密度。这种方法比 Ait-Sahalia (1996) 边际密度检验能探测出更为广泛的模型设定错误, 因为边

际分布检验不能区分有着相同边际分布但不同转移概率密度的模型。相比而言，转移概率密度可以刻画扩散过程的全部动态特征。为避免持久相关的问题，Hong & Li (2001) 首先对原始数据进行一种类似 (6.3) 的概率密度积分变换，变换后的数据在模型设定正确时，服从 *i.i.d.* $U[0,1]$ 分布。他们还修正了非参数核密度估计的边界偏差。这一检验在有限样本下表现良好。把它应用于 Ait-Sahalia (1996) 中相同的点利率数据，Hong & Li (2001) 肯定地拒绝了許多线性和非线性的单因子扩散模型，并发现拒绝主要是因为违背了马尔可夫性质。马尔可夫性质是金融扩散模型的一个基本假设。⁸

还有其他针对扩散模型的诊断检验。一个流行的方法是 Gallant & Tauchen (1996a) 的有效分值检验 (efficient score-based test)。Gallant & Tauchen (1996a) 首先对数据拟合了一个半非参数似然模型。这个模型之所以称为半非参数是因为它采用的方法是非参数方法，但同时结合进某些含参数的部分 (例如 ARCH) 以改进小样本特性。它在渐近意义上没有模型设定错误的问题。为检验参数模型的正确性，他们比较了半非参数似然和相应的参数模型的分值。当模型设定正确时，半非参数似然和参数模型的分值相互十分接近。二者之间的显著差别则表明模型设定有误。Gallant & Tauchen (1996a) 进一步发展了一族的 *t* 检验，可以指出模型设定错误的方向。Gallant & Tauchen (1996a) 的检验已被应用于美国财政部债券利率期限结构，美国股市价格和外汇汇率数据等 (例如，Gallant & Tauchen, 1996b, 1997)。他们发现对利率数据所有的单因子模型都被强烈拒绝，但对于股票价格数据并未发现拒绝一个随机波动扩散向量多因子模型的证据。然而，正如 Gallant & Tauchen (1996a) 指出的那样，若有效分值检验没有拒绝参数模型，严格说来，我们仍无法确定参数模型设定是否正确。这和 Hong & Li (2001) 的方法不同，后者在样本充分大的情况下总是可以探测模型设定是否正确。

八、分笔交易数据建模

近来广泛可得的股票、期权和外汇市场分笔成交数据对应用金融计量和市场微结构研究有着重要的影响 (参考 Bauwens & Giot, 2001)。交易数据由两种随机变量描述，其一是交易发生的时间 t_i ，其二是向量 X_i ，在时间 t_i 观测到的交易数据。这个向量被称作“标记”，因为它分辨并进一步描述了已发生的事件。标记的例子是在某一交易时间的交易量，合约价格和事后竞价、出价价格。

分笔交易数据的明显特征是在时间上的非规则分布。传统的固定间隔时间序列分析在此不能适用。当然我们可以把这些数据加总到固定时间间隔，但这样的加总会带来信息损失，因为交易发生的时间间隔包含着关于经济行为人的有价值信息。

⁸ 时间序列 $\{Y_t\}$ 服从马尔可夫过程，若其条件概率密度 $f(y|I_{t-1}, t)$ 仅依赖于其滞后项，即，当 $f(y|I_{t-1}, t) = f(y|Y_{t-1}, t)$ 时。

令 $Y_i \equiv t_i - t_{i-1}$, 亦即两个市场事件(如交易或价格变动)之间的持续期间。类似于波动的聚类效应, 分笔金融交易数据也呈现持续期间的聚类效应, 即, 较小的持续期间紧接着较小的持续期间, 而较长的持续期间紧接着较长的持续期间。Engle & Russell (1998) 提出了一个模型来预测在下一事件发生之前的持续期间有多长。市场交易者也许会对这一交易间隔感兴趣, 因为这可能影响他们下单的速度。这一模型被称作“自回归条件持续期间”(ACD)模型, 因为它着重于考查跨期的持续期间的自相关。

Engle & Russell (1998) 的 ACD 模型的关键假定是持续期间 $\{Y_i\}$ 的跨期依赖可以被条件期望持续期间 $\psi_i \equiv E(Y_i|I_{i-1})$ 完全概括, 因而标准化的持续期间 $\varepsilon_i \equiv X_i/\psi_i$ 是一个 *i.i.d.* 过程。这样, 我们可以把 ACD 模型写成如下形式:

$$\begin{cases} X_i = \psi_i \varepsilon_i \\ \psi_i = E(X_i|I_{i-1}). \end{cases} \quad (8.1)$$

此处 $\varepsilon_i \sim i.i.d.$ 且概率密度为 $f_0(\varepsilon)$ 。因为持续期间 X_i 和期望持续期间 ψ_i 都是非负的, 累积的扰动项 ε_i 也是非负的且期望为 1。和 ε_i 相关的是一个基准风险函数 (baseline hazard function), 由 ε_i 的概率密度 $f_0(\varepsilon)$ 除以生存函数 (survival function) 给出, 后者简单地等于 1 减去累积分布函数:

$$h_0(t) \equiv \frac{f_0(t)}{\int_t^\infty f_0(s)ds}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (8.2)$$

一个重要的概念是时间过程 $\{t_i\}$ 的条件强度函数 (intensity function), 即某个事件到达的瞬时概率, 例如给定过去信息集 I_{i-1} , 在每一时点 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ 一个报价发生的瞬时概率。它概括了未来事件的期望到达速率以及它如何依赖于 I_{i-1} 。条件强度可以被用在期权定价上。依定义, 给定信息集 I_{i-1} , 点过程 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ 的条件强度是:

$$\lambda(t|I_{i-1}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < s < t + \Delta t | I_{i-1})}{P(s > t | I_{i-1})}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i. \quad (8.3)$$

这个函数同时依赖于期望持续期间 ψ_i 和扰动项密度函数 $f(\varepsilon)$ 。当 ε_i 服从 *i.i.d.* EXP (1) (指数分布) 时, 我们则有:

$$\lambda(t|I_{i-1}) = \Psi_i^{-1}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

当 ε_i 服从 *i.i.d.* 韦伯 (Weibull) 分布时, 我们有

$$\lambda(t|I_{i-1}) = [\Gamma(1 + \gamma^{-1}\Psi_i^{-1})]^\gamma (t - t_{i-1})^{\gamma-1} \gamma, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i,$$

此处 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, γ 是 Weibull 参数。对 ε_i 使用韦伯分布而非指数分布, 则持续期间可能更长或更短, 取决于参数 γ 是否大于 1。指数分布对应于 $\gamma=1$ 的韦伯分布。条件强度函数 $\lambda(t|I_{i-1})$ 还可以只在给定的 ψ_i 形式的条件下进行非参数估计, 这不需要关于 ε_i 概率密度的知识 (例如, Engle, 2000)。

一般说来, 人们对条件持续期间 ψ_i 有直接的兴趣。例如, 当感兴趣的事件是价格变化时, ψ_i^{-1} 就类似于即时价格波动。有很多种关于 ψ_i 的参数结

构设定。一个例子是 ACD(q) 模型, 它假定持续期间仅依赖于最近的 q 个持续期间:

$$\psi_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j Y_{i-j}, \quad (8.4)$$

这类似于 ARCH(q) 结构。该模型一个自然的扩展是通过加入 p 阶滞后持续期间而引入无穷的记忆:

$$\psi_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j Y_{i-j} + \sum_{j=1}^p \beta_j \psi_{i-j}, \quad (8.5)$$

这个模型被称为 ACD(p, q), 类似于 GARCH(p, q)。ACD 模型, 以及在此基础上加入其他经济变量所作的适当修改, 提供了一个方便的框架以检验经济假说和金融理论, 如市场微结构理论和价格 - 交易量关系假说 (参考 Engle, 2000; Engle & Russell, 1997, 1998)。

如同强式 GARCH 建模, ACD 模型中 ε_i 的 *i.i.d.* 假定隐含着持续期间的所有跨期依赖可以由期望持续期间 ψ_i 刻画。似乎大多数金融市场都违背这一假定。违背 *i.i.d.* 假定不会导致参数估计不一致 (参考 Engle, 2000), 但是预计它会对条件强度的估计产生偏差。

九、结 论

这篇论文对金融计量——现代金融理论的一个重要部分——的新近发展作了一个选择性的综述。基于一个统一的统计学框架, 它涵括了有效市场假说检验, 金融收益预测, 波动建模, 风险值, 概率密度预测, 以及金融时间序列模型的诊断检验。这些数量方法对于研究中国金融市场可能有很大的潜在应用价值。当然, 在中国, 许多关键的金融工具, 如汇率和利率仍然在不同程度上受到政府控制和影响, 而且由于文化、历史和经济系统的诸多不同, 中国的经济行为人和西方国家的经济行为人在很多方面行为迥异。我们在这里讨论的金融计量方法和模型应用于研究中国金融市场时, 必须考虑这一点。毫无疑问, 为描述中国金融市场的情况, 我们必须发展新方法和模型。

参考文献

- [1] Ait-Sahalia, Y., "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate," *Review of Financial Studies*, 1996, 9, 385-426.
- [2] Ait-Sahalia, Y., "Maximum-Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: A Closed-Form Approach," forthcoming in *Econometrica*, 2001.
- [3] Ait-Sahalia, Y. and A. Lo, "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices," *Journal of Finance*, 1998, 53, 499-547.
- [4] Arzac, E. and V. Bawa, "Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety First Investors," *Journal of Financial Economics*, 1977, 4, 277-288.
- [5] Baillie, R. and T. Bollerslev, "Intra-day and Inter-market Volatility in Foreign-Exchange Markets," *Review of Economic Studies*, 1989, 58, 565-585.

- [6] Bauwens, L. and P. Giot, *Econometric Modelling of Stock Market Intraday Activity*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [7] Berkowitz, J., "Evaluating for Forecasts of Risk Models," Forthcoming in *Journal of Business and Economic Statistics*, 2001, 19, 465-474.
- [8] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 1973, 81, 637-654.
- [9] Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 1986, 31, 307-327.
- [10] Bollerslev, T., "Financial Econometrics: Past Developments and Future Challenges," *Journal of Econometrics*, 2001, 100, 41-51.
- [11] Brock, W., D. Dechert, J. Scheinkman and B. LeBaron, "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension," *Econometric Reviews*, 1996, 15, 197-235.
- [12] Campbell, J., A. Lo and C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, New Jersey: Princeton University Press, 1997.
- [13] Chapman, D., and N. Pearson, "Is the Short Rate Drift Actually Nonlinear?" *Journal of Finance*, 2000, 55, 355-388.
- [14] Cheung, Y.W. and L.K. Ng, "A Causality-in-Variance Test and Its Application to Financial Market Prices," *Journal of Econometrics*, 1996, 72, 33-48.
- [15] Christoffersen, P., "Evaluating Interval Forecasts," *International Economic Review*, 1998, 39, 841-862.
- [16] Clements, M.P. and D.F. Hendry, *Forecasting Economic Time Series*, New York: Cambridge University Press, 1998.
- [17] Clements, M.P. and D.F. Hendry, *Forecasting Non-stationary Economic Time Series*, Cambridge, MA: MIT Press, 1999.
- [18] Clements, M.P. and J. Smith, "Evaluating the Forecast Densities of Linear and Non-linear Models f Applications to Output Growth and Unemployment," *Journal of Forecasting*, 2000, 19, 255-276.
- [19] Cox, J.C., Ingersoll, and S.A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 1985, 53, 385-407.
- [20] Diebold, F. X., T.A. Gunther and A.S. Tay, "Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management," *International Economic Review*, 1998, 39, 863-883.
- [21] Diebold, F.X., J. Hahn and A.S. Tay, "Multivariate Density Forecast Evaluation and Calibration in Financial Risk Management High-Frequency Returns of Foreign Exchange," *Review of Economics and Statistics*, 1999, 81, 661-673.
- [22] Diebold, F. X. and J. A.Nason, "Nonparametric Exchange Rate Prediction," *Journal of International Economics*, 1990, 28, 315-332.
- [23] Duffie and J. Pan, "An Overview of Value at Risk," *Journal of Derivatives*, 1997, 4, 13-32.
- [24] Duffie, D., and K. Singleton, "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices," *Econometrica*, 1993, 61, 929-952.
- [25] Durlauf, S., "Spectral Based Tests for the Martingale Hypothesis," *Journal of Econometrics*, 1991, 50, 1-19.
- [26] Elerian, O., S. Chib and N. Shephard, "Likelihood Inference for Discretely Observed Non-Linear Diffusions," Forthcoming in *Econometrica*, 2000.
- [27] Engle, R., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 1982, 50, 987-1006.
- [28] Engle, R., "Financial Econometrics? A New Discipline with New Methods," *Journal of Econometrics*, 2001, 100, 53-56.
- [29] Engle, R.F. T. Ito and W. Lin, "Meteor Shower or Heat Wave? Heteroskedastic Intra-Daily Volatility in the Foreign Exchange Market," *Econometrica*, 1990, 59, 524-542.
- [30] Engle, R. and G. Gonzalez-Rvera, "Semiparametric ARCH Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 1993, 9, 345-359.
- [31] Engle, R. and C. Manganli, "Conditional Autoregressive Value at Risk: CAViaR Models," Working Paper, Department of Economics, University of California, San Diego, 1999.
- [32] Fama, E. F., "Efficient Capital Market: A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance*, 1970, 25, 383-417.
- [33] Gallant, A. R. and G. Tauchen, "Seminonparametric Estimation of Conditionally Heterogeneous Processes: Asset Pricing Applications," *Econometrica*, 1989, 57, 1091-1120.
- [34] Gallant, A.R. and G. Tauchen, "Which Moments to Match?" *Econometric Theory*, 1996a, 12, 657-681.

- [35] Gallant, A. R. and G. Tauchen, "Specification Analysis of Continuous Time Models in Finance," in *Modelling Stock Market Volatility: Bridging the Gap to Continuous Time*, P. E. Rossi, ed., pp. 357-383, San Diego: Academic Press, 1996b.
- [36] Gallant, A. R. and G. Tauchen, "Estimation of Continuous-Time Models for Stock returns and Interest Rates," *Macroeconomic Dynamics*, 1997, 1, 135-168.
- [37] Glosten, L. R., R. Jahannathan and D.E. Runkle, "On the Relationship Between Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance*, 1993, 48, 1779-1801.
- [38] Gollier, C., P.F. Koehl and J.C. Rochet, "Risk-Taking Behavior with Limited Liability and Risk Aversion," *Journal of Risk and Insurance*, 1997, 64, 347-370.
- [39] Granger, C. W. J., "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods," *Econometrica*, 1969, 37, 424-438.
- [40] Granger, C.W.J., "Testing for Causality: A Personal View," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1980, 2, 329-352.
- [41] Granger, C., *Empirical Modeling in Economics: Specification and Evaluation*, London: Cambridge University Press, 1999.
- [42] Granger, C. and P. Newbold, *Forecasting Economic Time Series*, 2nd Edition, New York: Academic Press, 1987.
- [43] Granger, C. and M.H. Pesaran, "A Decision Theoretic Approach to Forecasting Evaluation," in *Statistics and Finance: An Interface*, W.S. Chan, W.K. Li and Howell Tong, eds., pp. 261-278, London: Imperial College Press, 2000.
- [44] Granger, C. and T. Terasvirta, *Modelling Nonlinear Economic Relationships*. New York: Oxford University Press, 1993.
- [45] Hansen, B., "Autoregressive Conditional Density Estimation," *International Economic Review*, 1994, 35, 705-730.
- [46] Hansen, L.P. and J.A. Scheinkman, "Back to the Future of Generating Moment Implications for Continuous Time Markov Processes," *Econometrica*, 1995, 63, 767-804.
- [47] Härdle, W., *Applied Nonparametric Regression*, New York: Cambridge University Press, 1990.
- [48] Heath, D.C., Jarrow, R.A., Morton, A., "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation," *Econometrica*, 1992, 60, 77-105.
- [49] Hong, Y., "Hypothesis Testing in Time Series via the Empirical Characteristic Function: A Generalized Spectral Density Approach," *Journal of the American Statistical Association*, 1999, 84, 1201-1220.
- [50] Hong, Y., "Evaluation of Out-of Sample Density Forecasts with Application to Stock Prices," Working paper, Department of Economics and Department of Statistical Science, Cornell University, 2000.
- [51] Hong, Y., "A Test for Volatility Spillover with Application to Exchange rates," *Journal of Econometrics*, 2001, 103, 183-224.
- [52] Hong, Y. and J. Lee, "One-sided Testing for ARCH Effect Using Wavelets," Forthcoming in *Econometric Theory*, 2001.
- [53] Hong, Y. and T. Lee, "Inference and Forecasts of Foreign Exchange Rates via Generalized Spectrum and nonlinear Time Series Models," Working paper, Department of Economics and Department of Statistical Science, Cornell University, 2000.
- [54] Hong, Y. and H. Li, "Nonparametric Specification Testing for Continuous-time Models," Working paper, Department of Economics and Department of Statistical Science, Cornell University, 2001.
- [55] Jansen, D.W., K.G. Koedijk and C.G. de Vries, "Portfolio Selection with Limited Downside Risk," *Journal of Empirical Finance*, 2000, 7, 247-269.
- [56] Jorion, P., *Value at Risk*, 2nd Edition, McGraw-Hill: New York, 2000.
- [57] King, M.A. and S. Wadhvani, "Transmission of Volatility Between Stock Markets," *Review of Financial Studies*, 1990, 3, 5-33.
- [58] J.P. Morgan, "Riskmetrics-Technical Document," 4th Edition, Morgan Guaranty Trust Company: New York, 1996.
- [59] Lee, J. and Y. Hong, "Testing for Serial Correlation of Unknown Form Using Wavelet Methods," *Econometric Theory*, 2001, 17, 386-423.
- [60] Levy, H. and M. Sarnet, "Safety First: An Expected Utility Principle," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1972, 7, 1829-1834.

- [61] Ljung, G.M. and G.E.P. Box , "A Measure of Lack of Fit in Time Series Models", *Biometrika*, 1978, 65, 297-303.
- [62] Lo, A.W. , Maximum Likelihood Estimation of Generalized to Processes with Discretely Sampled Data, *Econometric Theory*, 1988, 4, 231-247.
- [63] Lo, A. and MacKinlay , "Stock Prices Do Not Follow Random Walks; Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies*, 1988, 1, 41-66.
- [64] Lukacs, E. , *Characteristic Functions*, 2nd Edition. Charles Griffin & Company Limited: London, 1970.
- [65] Nelson, D. , "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 1991, 59, 347-370.
- [66] Nelson, D. and C. Cao , "Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model," *Journal of Business and Economic Statistics*, 1992, 10, 229-370.
- [67] Pagan, A. , "The Econometrics of Financial Markets", *Journal of Empirical Finance*, 1996, 3, 15-102.
- [68] Peek, J. and E.S. Rosengren , "The International Transmission of Financial Shocks The Case of Japan," *The American Economic Review*, 1997, 87, 495-505.
- [69] Pritsker, M. , "Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models," *Review of Financial Studies*, 1998, 11, 449-487.
- [70] Rosenblatt, M. , "Remarks on a Multivariate Transformation," *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, 23, 470-472.
- [71] Rothschild, M. and J. Stiglitz , "Increasing Risk: A Definition," *Journal of Economic Theory*, 1970, 2, 225-243.
- [72] Sentamero, A. and D. Babbel , "Risk Management by Insurers f An Analysis of the Process," *Journal of Risk and Insurance*, 1997, 64, 231-270.
- [73] Silverman, B. , *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall: London, 1986.
- [74] Stanton, R. , "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk," *Journal of Finance*, 1997, 52, 1973-2002.
- [75] Sundaresan, S. , Continuous-Time Methods in Finance A Review and an Assessment, *Journal of Finance*, 2001, 55, 1569-1622.
- [76] Tauchen, G. , "Notes on Financial Econometrics," *Journal of Econometrics*, 2001, 100, 57-64.
- [77] Tay, A. and K. Wallis , "Density Forecasting: A Survey," Forthcoming in *Journal of Forecast*, 2000.
- [78] Tjostheim, D. , "Measures of Dependence and Tests of Independence," *Statistics*, 1996, 28, 249-284.
- [79] Vasicek, O. , "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 1977, 5, 177-188.
- [80] White, H. , "Economic Prediction Using Neural Networks: The Case of IBM Daily Stock Returns," Proceedings of the Second Annual IEEE Conference on Neural Networks, 1988, II: 451-458.
- [81] White, H. , "A Reality Check for Data Snooping," *Econometrica*, 2000, 68, 1097-1028.

Some Recent Development in Financial Econometrics

YONGMIAO HONG

(Cornell University)

Abstract This paper is a selective review on some recent developments in financial time series econometrics, using a unified statistical framework. The topics covered include tests of the efficient market hypothesis and prediction of financial returns, volatility clustering and spillover, value at risk, probability density forecasts, as well as diagnostic tests for financial models. For each financial context, we discuss suitable statistical concepts, models and methods, as well as some of their applications to financial data.

JEL Classification C40, G00, B41