趋势与波动相关下的期权定价模型

唐毅南

复旦大学 新政治经济学中心
Ynan.tang@gmail.com

陈平
复旦大学 新政治经济学中心，北京大学 国家发展研究院

2010 年 3 月 26 日被《金融评论》接受

摘要

趋势与波动相互作用造成的相关性，是金融市场复杂性的根源。我们引入群体动力学来统一描述平稳市场下的期权定价和金融危机。为此保留资产定价的无套利组合机制，但放弃无风险利率（也即不变趋势）的假设，因为金融危机意味着趋势的瓦解。我们用改进的 HP 滤波器来识别变化的趋势，得到一般期权定价模型，模型的解包含多重频率。金融衍生品市场崩溃的条件可以理解为危机心理造成的趋势瓦解。Black-Scholes（BS）模型可以视为一般期权模型的一个特例。

关键词：趋势波动相关性，，期权定价，HP 滤波器
JEL 分类：C51, D53, G01

Option Pricing with Interactive Trend and Volatility

Abstract

Financial complexity is rooted in interaction between trend and volatility in option pricing. Population dynamics is introduced for developing a general model both for normal option market as well as financial crisis. The arbitrage portfolio can be preserved for option pricing. Therefore, the risk free interest rate is no longer valid, since financial crisis implies a trend collapse. The Hodrick-Prescott (HP) filter can be modified to separate trend from cycle series.

The general model of option pricing can be solved with multiple frequencies. The condition of market collapse can be understood by trend collapse under crisis expectation. The Black-Scholes (BS) model can be obtained as a special case of the general model of option pricing.

KEY WORDS: trend-volatility interaction, option pricing, HP filter, market crash
JELCS: C51, D53, G01

引言

金融学的期权定价理论是均衡理论的最高成就。以几何布朗运动为基础的期权定价方程，不仅数学模型简单美丽，而且是金融工程的基础（Samuelson 1965b, Black and Scholes 1973, Merton 1973）。问题是均衡理论没有考虑金融市场不稳定的机制。2008 年美国金融危机的源头就是衍生产品市场的瓦解，这出乎金融经济学家的预料。我们早在多年前就注意到本质是代表者模型的几何布朗运动是随时间爆炸的，不能描写可持续的金融市场。我们提出用群体模型的生灭过程来取代几何布朗运动，作为一般金融动力学的基础（Chen 2002, 2005, 李华俊 2002，陈平 2004)。金融危机的教训，给我们发展更一般的期权理论提供了契机。

凯恩斯和行为金融学指出，大众心理的相互作用是金融内生不稳定性的重要来源（Keynes1936, 凯恩斯 1999，Akerlof and Shiller 2009, 阿克洛夫，希勒 2009）。要从动力学机制理解动物精神，就必须考虑金融市场人群行为的异质性。有效市场假说的数学基石是形式简单的布朗运动和鞅过程（Samuelson 1965a）。均衡理论使用的代表者模型假设市场套利机制可以完全抵消非理性（即非线性、非均衡）的市场活动，它的前提是漂移项和扩散项没有关联，否则不能保证套利完备。这

是有效市场假说（EMH）(Fama, 1970, 1991)和 Black-Scholes 模型(以后简称 BS 模型)的共同前提（Hull, 2000）。漂移项和扩散项无关的集中表现，则是假设无风险利率的存在，其实质是假设股价增长趋势为常数。否认趋势变化，也就否认趋势变化导致市场预期剧变，从而引发金融危机和市场瓦解的可能。以往计量金融学修正 BS 模型的努力集中在引入对方差（波动率）常数的修正，但是保留无风险利率的假设，例如著名的 ARCH 和 GARCH 模型（Engle 1982，Bollerslev 1986）。为了给出期权市场存在金融危机的可能性，必须放弃趋势不变的假设，研究群体运动下，趋势波动的高阶矩作用对期权定价模型的影响。

我们对现有的期权定价理论做了两项改进：第一，用群体的生灭过程替代几何布朗运动模型描写金融价格随时间的运动，原因是我们发现宏观指数和股市指数的相对偏差是随时间稳定的，而群体运动的生灭过程的相对偏差就趋于常数（Chen 2002，李华俊，陈平 2010，唐毅南，陈平 2010）。第二，我们在描写一般随机过程的主方程中，考虑趋势（漂移）项与波动（扩散）项的关联，以包容不稳定的复杂金融行为，扩展动态随机过程的视野。

历史上，生灭过程从数学方便的角度引入过股价运动的描述（Cox and Ross 1976，Kou & Kou 2004），但没有深入市场不稳定性的机制。曾伟和陈平采用生灭过程为金融动力学的出发点（2008），第一基于金融市场相对偏差稳定性的观察（Chen 2002），第二考虑行为金融中分别采用正负反馈策略的两类交易者（De Long and Shleifer 1990），用以理解波动率微笑，统一解释已有的期权定价的 BS 及多种修正模型，包括著名的方差常弹性（CEV）模型等作为特例（Cox and Ross 1976）。用行为金融建模的优点是经济机制直观易懂，弱点是引入较多的行为参数，不易用经验数据校准用于实际操作。

我们在早先的文章中证明，用时变概率分布的观点，可以直接从经验数据的观察出发确立随机过程的非线性转移概率，将市场风险的刻画从方差推广到包括了偏度(Skewness)和峰度(Kurtosis)在内的更高阶矩，用以解释金融危机的动力学特征——趋势瓦解和高阶矩发散(唐毅南和陈平 2010，以后简称为 TC 模型)。当趋势与波动存在相关性时，即使将过程截断到二阶（方差），而且保留伊藤引理的应用，也不能做到完全套利，所以 BS 模型不能描写趋势与波动相关时的复杂金融市场。我们证明群体行为的生灭过程可以同时容纳长时间的平稳市场和短时间的金融危机两种矛盾现象。

本文进一步发展我们以前的工作，用群体模型修正期权定价理论。首先，我们用拟线性随机过程逼近真实的价格过程。然后，在有历史记忆的条件下，重构资产定价的套利组合。我们放弃新古典模型无风险利率的简化假设，将波动项中的高阶矩影响整合到随时间演化的趋势项。但是如何解决有记忆下的趋势波动分解问题是目前的难题。我们改进了已有的 HP 滤波器（Hodrick & Prescott 1997）来解决此问题。我们用价格模拟的方法检验一般期权定价模型，发现可以用测量的参数对期权进行定价，而 BS 模型是 TC 一般模型的一个特例。最后，我们讨论这次金融危机的教训，给出衍生品市场瓦解的条件，给未来的金融监管提供了理论基础。

一. 趋势-波动关联下的广义扩散过程

我们先建立含时演化的随机过程的一般形式，以描写金融时间序列中观察到的趋势（漂移）项与波动（扩散）项的关联效应。然后导出生灭过程的简化模型。

（一） 从主方程到生灭过程：非稳态随机过程的一般形式

金融计量模型通常假设随机过程服从某种静态的统计分布，成为 i.i.d.（独立同分布）。为了考虑随机过程的一般情形，我们假设概率分布函数是空间（这里的空间变量是价格）与时间的分布函数。其随时间的演化满足一个偏微分方程，在数学物理文献中称之为主方程，形式如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x',t')=\int dxdtW(x',t'\mid x,t)P(x,t)-W(x,t\mid x',t')P(x',t'). \tag{1}$$

其中，$\{x\}$是一随机过程，本文中令$x=\ln S$（S代表实际变量，例如股价，GDP，等），$P(x,t)$ 是其概率分布函数，$W(x,t\mid x',t')$是其转移概率，代表从t'时刻到t时刻内随机变量取值由x'变为x的概率。

新古典金融学所采用的鞅测度及随机游走模型，与我们即将讨论的群体生灭过程，都可看做是一般随机过程的简单情形：取状态变化为为单步离散形式（即$x'-x=\pm 1$，每次跳跃的幅度是 1 个单位），并取$t'\to t$的极限，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}&=W_{+}(x-1)P(x-1,t)+W_{-}(x+1)P(x+1,t)\\&-[W_{+}(x)+W_{-}(x)]P(S,t),\end{aligned} \tag{2}$$

其中$W_{+}=W(x+1\mid x)$是从x转移到$x+1$的转移概率，$W_{-}=W(x-1\mid x)$是从x转移到$x-1$的转移概率。

为了便于比较，以及W_{+}和W_{-}为常数，可以得到一个线性生灭过程。线性生灭过程是经验上符合实证观察的内生波动过程，满足大量粒子组成的大数原理（李华俊，陈平 2010），我们在先前的工作中定义这种过程为均值凝结（mean coherent）的扩散过程（唐毅南，李华俊，陈平 2010）。非线性的均值凝结扩散过程是产生金融危机的动力学机制（唐毅南，陈平 2010）。这里我们讨论在系统平稳的前提下，均值约束扩散过程如何对期权定价公式（BS 模型）进行修正。分析主方程(2)的详细情况可以通过分析随机过程的各阶矩进行。

在系统平稳，接近线性（W_+ 和 W_- 为常数）的情况下，主方程(2)可以化为一个 Fokker-Plank 方程（Gardiner 1985）。

$$-(W_+ - W_-)\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)+\frac{1}{2}\frac{W_+ + W_-}{W_+ - W_-}E(x(t))\left[e^{(W_+ - W_-)t}-1\right]\partial_x^2 P(x,t)=\partial_t P(x,t) \quad (3)$$

我们可以直接求出过程的期望和方差（Van Kampen 1976），这是主方程的矩表示式，截止到方差（二阶矩）。

$$\frac{dE(x(t))}{dt}=(W_+ - W_-) \quad (4)$$

其中 $E(\bullet)$ 表示变量的期望值。

方程(4)表示随机行为具有长期的效果，当前的随机行为 $(W_+ - W_-)$ 会积累到下一时刻，即系统是有记忆的。其波动率 σ_x^2 是一个随 x 的期望 $E(x(t))$ 演化的值

$$\sigma_t^2=\frac{W_+ + W_-}{W_+ - W_-}E(x(t))\left[e^{(W_+ - W_-)t}-1\right] \quad (5)$$

生灭过程是一个集体随机过程。代表在一个由随机运动的多粒子组成的大系

统内，其系统的波动率依赖于系统的宏观状态，粒子波动的加总（即系统的整体波动）满足大数原理，而非单纯的粒子个数乘上单个粒子的平均波动。

（二）价格-波动的双向反馈与趋势-波动的相关性

不同的市场价格状态对应于不同的转移概率，所以市场行为受市场状态的影响，反过来又影响市场状态，这是一种双向反馈机制。索罗斯把这种现象称为反身性（Soros 1987，索罗斯 1999）。其简化的数学表象可称为价格空间的非线性，假如可以忽略时间对价格机制的影响，具体表现为期权方程中价格（趋势）-波动的双向反馈。只要考虑到W_+和W_-分别是求和供的结果，因此从历史（时间轴）上看，价格-波动的双向反馈导致金融价格序列不可避免的有记忆，和历史相关。

考虑将W_+和W_-写为价格指数S的函数，$W_+(S)$和$W_-(S)$，当且仅当$\frac{dE(x)}{dt}=(W_+-W_-)=0$时，随机波动不产生随时间变化的趋势。否则，只要注意到$W_+(S)=W_+(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)$和$W_-(S)=W_-(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)$，那么总可以写出

$$\frac{dE(x)}{dt}=(W_+-W_-)=f(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)\neq 0$$

$$\sigma_t^2=\frac{g(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)}{f(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)}E(x(t))\left[\exp(f(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)t)-1\right]\neq\sigma_0^2 t \qquad (6)$$

其中$(W_++W_-)=g(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)$。

考虑到$\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i$即是历史，(6)式所示的转移幅度表示一个历史相关的时间序列，

趋势项和波动并非相互独立的过程，而是共同产生相互关联的，不能无关的各自独立引入。这一特征会深刻的影响套利的可能性。

（三）随机游走、维纳过程与生灭过程的比较

为了和新古典金融学做一对比，考虑当$W_+ = W_-$且等于常数c，方程(4)和(5)将变为

$$\frac{dE(x(t))}{dt} = (W_+ - W_-) = 0 \tag{7}$$

和

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \lim_{W_+ \to W_-} \frac{W_+ + W_-}{W_+ - W_-} E(x(t)) \left[e^{(W_+ - W_-)t} - 1 \right] = (W_+ + W_-) x(0) t \\ &= \sigma_0^2 t\end{aligned} \tag{8}$$

已知一个随机过程的趋势$\frac{dE(x(t))}{dt}$和方差σ_t^2，就可以将此随机过程写为一个随机微分方程

$$dx = \frac{dE(x(t))}{dt} dt + \sigma_t dW \tag{9}$$

其中的dW是标准维纳过程，其期望为 0，方差为 1。因此，用方程(7)和(8)可以把主方程(2)对应作为新古典金融学数学基础的扩散过程，其随机微分方程是

$$dx = \sigma dW \tag{10}$$

。方程(10)就是建立 BS 模型使用的扩散过程。表示系统的随机行为不具有长期效果，即系统是没有记忆的。扩散过程对应于一个转移概率$W_{+}=W_{-}$且为常数的随机过程,其漂移项和随机力无关，需单独引入。扩散过程是线性生灭过程的一个特例。

（四） 忽略趋势条件下的风险中性定价与资产组合

对维纳过程(10)应用 Merton 的不考虑信贷的自我融资（self-Financing）资产组合并应用 Itô 引理，可以得到(Merton 1973)

$$\frac{\partial O}{\partial t}=r_W O-\left(r_W-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial O}{\partial x}-\frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 O, \tag{11}$$

O 代表一个看涨期权，r_W 是自我融资资产组合$\Pi(t)=-\frac{\partial O}{\partial S}S(t)+O(S(t),t)$的收益率。很显然，方程(11)就是 BS 模型的 Merton 形式，里面不含趋势$dE(x)/dt$。考虑到趋势就是对未来期望的预期，不含趋势就符合风险中性定价的要求。此时自我融资资产组合的收益并非内生决定，就变成一个完全的外生变量。通过进一步假设这个收益是常数，而且就是无风险利率r，就可以替换r_W，将方程(11)变成标准的 BS 模型。

（五）有记忆下的拟资产组合与拟线性过程

对具有记忆的方程(6)进行同样的操作，可以得到一个形式类似的拟资产组合：

$$\frac{\partial O}{\partial t}=r_W O-\left(r_W-\frac{\sigma\left(dE(x)/dt, S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i\right)^2}{2}\right)\frac{\partial O}{\partial S} -\frac{\sigma\left(dE(x)/dt, S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i\right)^2}{2}\partial_S^2 O \tag{12}$$

方程(12)则含有期望 $dE(x)/dt$，以及历史 $S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i$，不符合风险中性定价的要求。为了能够在具有历史和预期的情况下进行期权定价，我们考虑用一个参数可测的线性随机过程去近似稳定状况下的真实市场过程，然后可以得到一个不包含价格-波动的双向反馈的，波动和趋势独立的拟随机过程

$$ds=\mu'(t)dt+B(t)dW \tag{13}$$

方程(13)与 BS 模型和对其的一般修正（Hull 2000）中所用的随机微分方程（这些方程都可以用通式（9）或下节的方程(14)表示）的不同在于：B 是和趋势没有双向反馈的噪声，是白色化了的噪声。这种处理有利于即保持 BS 模型的大致形式，又解决暗藏在 BS 模型中的双向反馈。

二. 趋势-波动相关条件下资产定价问题的简化

在趋势-波动相关条件下求解期权定价的资产组合问题，经济学的实质是放弃忽略趋势下的无风险利率的假设，代之以趋势识别问题。把趋势以外的部分，整合为一个拟线性过程。从经验数据决定趋势之后，再求解拟线性扩散过程的资产组合问题。

（一）拟随机过程与趋势识别问题

对比通常用的扩散过程的随机微分方程

$$dS = \mu dt + \sigma dW \tag{14}$$

方程(13)的实质是将定价问题转化为趋势识别和波动率识别问题。因为(13)和(14)两式的区别仅在于趋势和波动的识别和认定不同。BS 模型的成功在于构造无风险套利的定价机制时只考虑波动项，其隐含的假设是趋势为常数（即无风险利率），这只有时间窗户很短时方能成立。假如投资者的时间尺度并非如此短视，忽略趋势变化的投资者在现实中不可能存在我们注意到投机风潮源于趋势的持续，而金融危机源于趋势的改变。为了保留无套利组合的定价形式，本文将实际价格演化简化为拟线性过程，然后把波动-趋势相关性分离出来，整合到趋势项。这样，研究趋势——波动相关性的理论问题，可以简化为从经验观察识别趋势项的操作问题。本文用(13)式来近似真实的金融时间序列，就可以满足方程(10)-(11)的风险中性定价要求。下面我们从经验分析的角度，研究时间序列的滤波器问题，如何从经验数据分离趋势与波动。

（二）HP 滤波器考虑历史和预期的一阶差分形式

在一般只考虑市场短期行为的风险计算中，使用的是对数一阶差分滤波器

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{\left(x_{t+1}-x_t\right)^2}{{x_t}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

这个计算方法只能得到(6)式。为了解释 NBER（National Bureau of Economic

Research）观察到的平均长度在 5 年左右的经济周期，真实经济周期理论引入兼顾长期经济趋势和中期经济波动的 HP 滤波器。HP 滤波器的形式为

$$\min_{\{X\}}\left\{\sum_{t=1}^{T}(x_t-E(x_t))^2+\lambda\sum_{t=1}^{T}[(E(x_{t+1})-E(x_t))-(E(x_t)-E(x_{t-1}))]^2\right\}, \tag{16}$$

其中, $\Delta t = 1$。

我们发现，HP 滤波器是和均值约束过程一致的滤波器（唐毅南，李华俊、陈平 2010）。另外，表达式(16)是二阶差分形式，其中第一项并没有进行滤波，第二项则表明了趋势的性质：当趋势为常数的时候，第二项等于 0。问题是，由于第二项的二阶差分形式并没有一个可直接观察的量，不能直观的表示出趋势的来源。下面将其改为基于可直接观察量 $\Delta x = x_{t+1} - x_t$ 的一阶差分形式，就可以清楚的看到，HP 滤波器第二项的来源是趋势——波动相关性。附录 A 给出了 HP 滤波器的一阶差分形式方程（A6），HP 滤波器可以重写为：

$$\min_{\{X\}}\left\{\sum_{t=1}^{T}(x_t-E(x_t))^2+\lambda\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial(W_+-W_-)}{\partial S_t}\Delta S_t\right)^2\right\}, \tag{17}$$

在一阶差分形式（17）中，第二项即趋势-波动相关项，说明 HP 滤波器是在考虑历史和期望的前提下计算趋势和方差的。

三．含高阶矩风险升水的一般期权定价模型

HP 滤波器有一个比一阶差分滤波器复杂的困难，就是一阶差分滤波器简单假

设不存在趋势，因此其关于趋势的参数恒等于 0，而 HP 滤波器则需要确定趋势相关的参数λ。在我们的先前的工作（唐毅南，陈平 2010）中已经指出，波动——趋势相关性和高阶矩都是价格-波动的双向反馈造成的，因此我们可以通过滤波后残差的价格-波动的双向反馈和时间非线性情况确定合适λ。确定合适的λ是为了尽可能将波动——趋势相关性识别到趋势项中，以便得到拟过程(13)。将拟过程(13)代入 self-financing 资产组合，就可以立即得到含有波动——趋势相关和高阶矩风险升水（记为 g）的期权定价公式。由于 g 的来源是存在于全时域的价格-波动的双向反馈，这将导致 g 具有一系列频率成分，因此我们用傅里叶级数来表示 g。

（一）用分形方法分解短期（1 年）内的趋势与波动

RBC（真实经济周期）学派对 HP 滤波器的使用参数的校准，以 NBER 经济周期为参照系。期权交易关注的时间尺度往往小于 NBER 经济周期。如何选择新的 HP 滤波器参数就是我们必须面对的问题。

Hodrick 和 Prescott(1997)最初引入 HP 滤波器时，通过假设趋势具有波动率σ来确定滤波参数λ，将λ取为噪声和趋势波动率的比率。实际上，λ值还代表了在时间序列中一个波动周期覆盖多少个连续数据点。我们在应用高频数据（日数据）的时候，因为不知道究竟一个波动周期有多长，故用分形布朗运动的 Hurst 指数构造选择λ的判据。

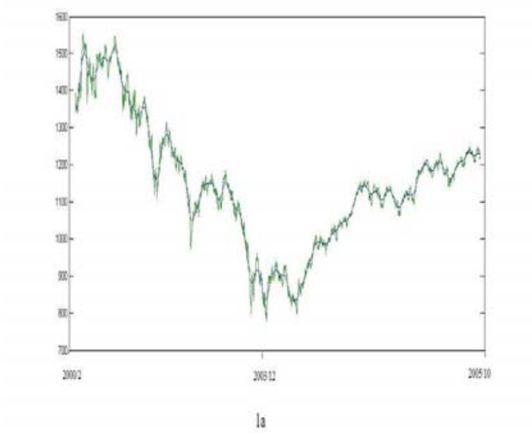
由于我们在 HP 滤波器的一阶差分形式(附录 A6 式)中没有看到 HP 滤波器含有和分形布朗运动或自回归等过程有关的时间非线性项，因此假设 HP 滤波器不影响原时间序列中分形布朗运动的 Hurst 指数。故我们调整λ的判据为：第一，

残差的均值为 0。第二，残差的 Hurst 指数和原序列相同。我们就可以确认合适的λ，可以使用拟过程(13)。

我们在计算机实验中（Tang，2009）发现，使用带参数的 HP 滤波器(Hodrick，Prescott，1997)对 S&P500 指数每日收盘价数据确定λ时，将滤波参数取为$\lambda = 2500$，就可以保证波动项不再包含价格-波动的双向反馈，而仅是一个分形布朗运动过程。这样就可以使用无参数的线性随机过程去近似稳定状况下的真实市场过程。然后可以得到一个不包含价格-波动的双向反馈的，波动和趋势独立的拟随机过程

$$\begin{aligned} ds &= \mu'(t)dt + B(t)dW \\ &\simeq dS = \mu(t)dt + \sigma(t)dW \end{aligned} \qquad (18)$$

其中，$\sigma(t)$是原序列的波动率，是用对数一阶差分滤波器(15)计算出的；$B(t)$是模拟序列的方差，是用 HP 滤波器计算出的。方程(18)中，$B(t)$将不会再与群体行为的价格-波动的双向反馈有关。换言之，没有价格的空间非线性，只有时间非线性，并且在数量上要小于原序列的方差$\sigma(x,t)$，如图 1.。



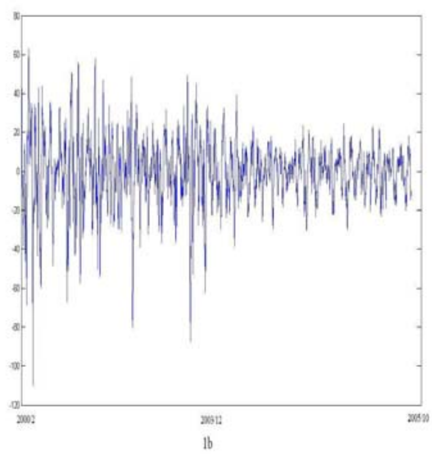


图 1. S&P 500 指数及滤波得到的趋势图(1a)和不含价格-波动的双向反馈的过程

B(1b) 数据时间从 2000/2/16 到 2005/9/23，滤波窗口为 1 年，$\lambda = 2500$。（数据来源：Datastream）

在图 1a 中，滤波得到的趋势由于数据频度很高，其波动周期也比较短。当用一年为滤波窗口时，2000 年到 2005 年间 S&P 500 指数的分形 Hurst 指数为 $H = 0.5308$，Hurst 指数控制 HP 滤波器的滤波参数为 $\lambda = 2500$。图 1b 是以一年为窗口的没有价格-波动的双向反馈的噪声 B，其期望为零，表明其不再对趋势有所贡献。以 20 个交易日为窗口的标准差 $\sigma_B = 14.99\%$。

（二）允许无风险套利的条件和金融危机出现的机制

我们的目的是把含有期望和历史的 σ 换成不含历史和期望的 B，因此，若对波动率被替换为 B 的自我融资组合应用 Itô 引理，其中的 $\frac{\partial O}{\partial S}\mu S$ 现在应该改为

$\frac{\partial O}{\partial S}\mu S = \frac{\partial O}{\partial s}(\mu' - G)s = \frac{\partial O}{\partial s}\mu' s - g(S,t)$。其中 $g(S,t)$ 是历史和期望带来的升水。能进行无风险套利的条件，是 g 存在并有限。当 $g = 0$ 时，就变成有效市场的 BS 模型。而当 g 变为正无穷大或负无穷大的时候，期权没有价格，这就是衍生品危机发生时的情况。当 g 有限且不等于 0，就成为我们所说的生机市场（viable market）。

g 的测量可以有三种方法，第一种方法是进行时频分析，既可以用一般的傅立叶分析，也可使用 Chen（2008）提出的 WGQ 滤波方法，对标的资产 HP 滤波后得到的趋势和周期进行分析。第二种方法是直接用期权价格的历史数据代入定价方程进行校准。BS 模型假设收益率不变，用历史数据校准隐含波动率。相应

的我们认为白色化后的噪声方差不变，可以校准收益率。第三种方法是用经济学原理校准。由于 Self-financing 证券组合相当于从一方借款（卖空操作），贷给另一方（现货操作），因此最完美的对冲应该没有收益，而非 Merton 认为的收益率为无风险利率 r。另外，金融危机前认为无风险利率为国债利率，金融危机后国债也有汇率风险和通胀风险，从这个角度看严格的无套利利率也应为零。因此我们认为 g=-r。这里我们试用第三种方法，并用第二种方法验证，最后再把 g 表示为方法一里的傅立叶级数。如果取无风险利率为美国一年期国债利率 3.4%，则 g 应该接近-3.4%。

将 g=-3.4%和 B 代入自我融资证券组合的微分表达式可以得到

$$
\begin{aligned}
d\Pi &= \frac{\partial O}{\partial t}dt + \frac{\partial O}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 dt - \frac{\partial O}{\partial S}dS \\
&= \frac{\partial O}{\partial t}dt + \frac{\partial O}{\partial s}ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial s^2}B^2 dt - \frac{\partial O}{\partial S}dS \\
&= \frac{\partial O}{\partial t}dt - g dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial s^2}B^2 dt
\end{aligned}
\tag{19}
$$

方程 (19)考虑到了当市场趋于平静时，由于滤波的数据频率相当高（日度数据），滤波得到的趋势 s 和真实价格 S 之差比较小，可取 $\frac{\partial O}{\partial S} \approx \frac{\partial O}{\partial s}$。于是可以得到一般的看涨期权定价公式

$$
O = S_0 N(d_1) - X\exp[-(r(T-t) + g(S,\omega_1,\cdots,\omega_n,T-t))]N(d_2), \tag{20a}
$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + B^2 / 2)(T - t) + g(S, \omega_1, \cdots, \omega_n, T - t)}{B\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - B^2 / 2)(T - t) + g(S, \omega_1, \cdots, \omega_n, T - t)}{B\sqrt{T - t}}, \qquad (20b)$$

其中$T - t$是距到期日时间，B为无价格-波动的双向反馈的序列的标准差。

上式还包含了稳定状态下的价格-波动的双向反馈$g(S, \omega_1, \cdots, \omega_n, T - t)$，其中$\omega_i$是傅里叶级数的特征频率。其余字母含义同通用的 BS 模型表示(Hull, 2000)。

（三）多种市场频率，时频测不准关系，和模仿赢家策略的局限

有效市场理论的深入人心，在于弗里德曼认为市场套利机会不可能持续存在（Friedman 1953）。他的理由是：假如存在某种结构性的盈利机制，模仿赢家的风潮将把赢家的大饼越分越小、很快趋零，导致赢家从市场上消失。我们称之为弗里德曼精灵，问题是弗里德曼忽视了金融市场的复杂性（Chen 2005）。我们从（20）式看到，通常情况下金融市场的波动包括无穷多的频率。由于波动力学中的测不准关系，假如交易者试图从数据观察中精确分辨频率的范围，损失的将是时间的分辨率。换言之，市场参与者用经验观察企图预测趋势的拐点或主导频率，不可避免的同时受观察数据和时间窗户的限制，也就是必然具有不可预测的套利风险。所谓有效市场假说，是假设趋势不变，所有频率分量为零的“安静市场“。只要交易者对市场价格的感受是非线性的，价格-波动的双向反馈就必然导致趋势和波动的相关性和路径依赖，就不可能有真正的安静市场。从市场监管来说，与其盲目相信”看不见的手“放任自流，不如严密注视经验观察显示的价格-波动的双向反馈的特征，并用政府政策和市场规则影响非线性的机制，从而限制或预防金融危机的可能性。这是（20）式给我们的政策启示。

（四）价格-波动的双向反馈，高阶矩升水，和危机预期的影响

我们来仔细研究一般期权定价模型的解（20）式的经济学含义。

从数学上看，定价公式(20)和 BS 模型差异在于，定价公式(20)包含了Kraus(1976)在经验数据中发现的高阶矩风险升水而不需要额外引入对高阶矩的偏好作为附加假设。BS 模型只含有二阶矩升水（隐含波动率），并且时间上的频率成分为 0，可称为 $\mathrm{BS}_{0,2}$ 模型。定价公式(20)使用滤波方法可以考虑所有阶矩的升水，$g(S,\omega_1,\cdots,\omega_n,T-t)$ 含有 n 个频率，可称为 $\mathrm{BS}_{n,\infty}$ 阶模型。有效市场理论是 $\mathrm{BS}_{0,2}$ 模型，相当于 $\mathrm{BS}_{n,\infty}\Big|_{\substack{g=0\\ B=\sigma\\ n=0}}$ 。

在所有 $\mathrm{BS}_{n,\infty}$ 里，$\mathrm{BS}_{0,\infty}$ 不含参数 ω_i，因此可观测性和 $\mathrm{BS}_{0,2}$ 是一样的，都是从历史数据中直接得到。因此 $\mathrm{BS}_{0,\infty}$ 并没有改变 BS 模型的非参数性，数学上，$\mathrm{BS}_{0,\infty}$ 模型相当于改进了隐含波动率。

（五）一般期权定价方程的数值模拟

为了和 BS 模型做一对比，我们使用常数的 g，即 $\mathrm{BS}_{0,\infty}$ 模型来模拟一只欧式看涨期权的价格。我们选一只 S&P500 指数看涨期权来进行模拟，结果如图 2。

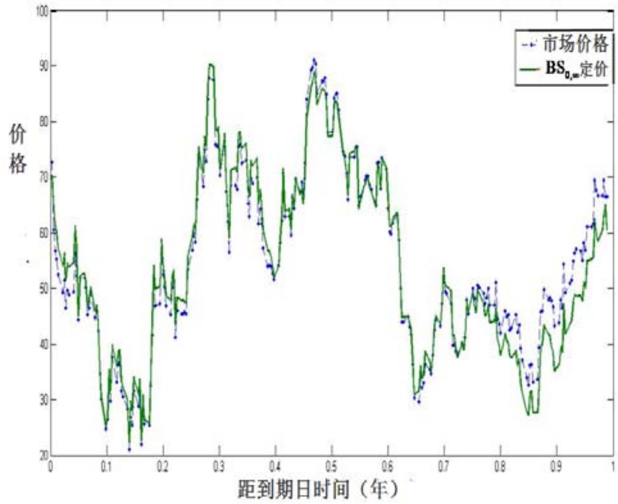


图 2、以 20 天为时间窗口的滤波对 s&p500 指数期权的模拟。期权为 CALL ISP JUN 1150，code 78218(PO)，g=-3.4%。（$B = 14.99\%$）(Data source: Datastream)..

图 2 中，当取 20 天为滤波窗口时，定价比取 1 年为时间窗口更接近市场价格。这并不是说明取 20 天的窗口有特别的意义，只是在本例中能够更好的反映期权价格的走势。我们发现，为了给出市场价格，我们有 g=-3.4%，而相应的美国一年期国债利率（无风险利率）正好是 3.4%。这说明如果用期权 78218（PO）来构造一个 self-financing 证券组合，它根本不应该有什么长期收益。这就是一般模型的优点：尽管 self-financing 证券组合的收益率在模型中未知，但是由于我们给出了很好的趋势识别的方案，这个收益率是很容易观测的。放弃 self-financing 证券组合的收益率等于无风险利率的假设并不会带来多少麻烦。

四．结论

和传统的 BS 期权定价模型相比，我们扩大了金融均衡理论的视野，可以统一理解市场接近均衡条件下的无套利定价和非均衡条件下市场行为的不稳定性

与复杂性。

我们看到，在金融市场的一般条件下，人们对复杂金融市场的把握，通常简化为长期趋势和短期波动两个分量。相对稳定平滑的趋势的存在是市场形成稳定预期的基础。市场波动是较短期的群体行为，人们在进行这种短期活动时也参考长期较稳定的预期，长短期之间具有显著的非线性相互作用。所以，一般条件下，趋势和波动是相互关联的，市场也就不存在无风险的套利。但是，在市场安静（相互作用很弱）的情况下，假设人们的历史记忆淡薄，就可以考虑非线性过程的线性近似，构造无风险套利的资产组合，得出传统的 BS 模型。

在经验分析上，从 HP 滤波器向 FD 滤波器的过渡，相应于没有历史记忆的线性近似。但是，和真实经济周期学派的噪声驱动模型不同，我们采用生灭过程的依据是经验观察中发现的更高级的随机过程：有机韧适过程是市场内生的涨落，其相对偏差随时间稳定。因而兼有金融市场波动加大的高阶矩风险，也具有熊彼特和海耶克认识到的市场内生的恢复能力，我们称之为有机韧适性（organic resilience）。

从均衡理论的噪声驱动论到非均衡理论的内生波动论，有一个重大的政策含义：前者市场是内生稳定的，无需政府监管和干预；后者市场波动是内生的，调整游戏规则和监管方式会对金融市场产生重大影响。金融危机的特征在趋势瓦解和高阶矩风险升水（唐毅南，陈平 2010）。此时的金融衍生品市场可能瓦解消失，如本次金融危机的情形。如何防止此类情形的发生，是我们下一步的研究课题。

致谢

我们感谢李华俊、史正富、刘昶、杨希野、姜波克、刘红忠、张金清、宋敏、

贾继承的有益讨论，及新政治经济学中心对我们研究的支持。我们也感谢匿名审稿人对我们的批评和指证。错误由我们自己负责。

数学附录

A.HP 滤波器的一阶差分形式

取时间间隔$\Delta t=1$，我们有

$$(E(x_{t+1})-E(x_t))\approx\frac{dE(x(t))}{dt}\Delta t=(W_{+}-W_{-}) \qquad \text{(A1)}$$

进一步得到

$$\begin{aligned}&(E(x_{t+1})-E(x_t))-(E(x_t)-E(x_{t-1}))\\&=(W_{+,t}-W_{+,t-1})-(W_{-,t}-W_{-,t-1})\end{aligned} \qquad \text{(A2)}$$

根据方程(6)，我们对转移概率W_t在W_{t-1}处进行 Tyler 展开，可以得到

$$\begin{aligned}&W_t(S_t)\\&=W(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)\\&\approx W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)+\frac{\partial W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)}{\partial S}\Delta S_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)}{\partial S^2}\Delta S_t^2\\&+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)}{\partial S^3}\Delta S_t^{\,3}+\ldots\end{aligned} \qquad \text{(A3)}$$

将展开式（A3）保留到一阶，就有

$$
\begin{aligned}
& W_t(S_t)-W_{t-1}(S_{t-1}) \\
& =W(S_0+\sum_{i=0}^{t}\Delta S_i)-W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i) \\
& \approx W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)+\frac{\partial W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)}{\partial S}\Delta S_t-W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i) \\
& =\frac{\partial W(S_0+\sum_{i=0}^{t-1}\Delta S_i)}{\partial S}\Delta S_t=\frac{\partial W_{t-1}}{\partial S}\Delta S_t
\end{aligned}
\tag{A4}
$$

这样方程（A2）变为

$$
\begin{aligned}
& (E(x_{t+1})-E(x_t))-(E(x_t)-E(x_{t-1})) \\
& =\frac{\partial(W_+-W_-)}{\partial S}\Delta S_t
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

于是 HP 滤波器可以重写为

$$
\min_{\{X\}}\left\{\sum_{t=1}^{T}(x_t-E(x_t))^2+\lambda\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\partial(W_+-W_-)}{\partial S_t}\Delta S_t\right)^2\right\}, \tag{A6}
$$

在一阶差分形式（A6）中，第二项即趋势-波动相关项，说明 HP 滤波器是在考虑历史和期望的前提下计算趋势和方差的。

参考文献

陈平（2004)：《文明分岔、经济混沌、和演化经济动力学》，北京大学出版社。

李华俊（2002)：《哪种随机过程能更好的描述宏观涨落的微观基础？——从相对偏差的共性去比较随机游走、扩散运动、生灭过程》，北京大学数学学院，学士论文。

李华俊，陈平（2010）：《经济波动的中观基础和竞争政策的宏观效益》，北京大学，国家发展研究院，中国经济研究中心，讨论稿。

唐毅南（2009）：《群体模型下的金融市场和资产定价研究：S 型需求曲线和金融危机的群体动力学，以及含高阶矩风险升水的期权定价》，复旦大学经济学院，博士论文。

唐毅南，陈平（2010）：《群体动力学和金融危机的预警判据》，复旦大学新政治经济学中心，讨论稿。

曾伟，陈平（2008）：《波动率微笑、相对偏差和交易策略——基于非线性生灭过程的股价波动一般扩散模型》，《经济学（季刊）》，第 7 卷第 4 期，1415-1436 页。

Akerlof, G.A., Shiller, R.J.（2009）：*Animal Spirits,* Princeton University Press, Princeton ； 阿克洛夫，希勒，《动物精神》，中信出版社，（2009）。

Black, F. and M. Scholes（1973）： “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

Bollerslev, T., (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Chen, P.(2002): “Microfoundations of Macroeconomic Fluctuations and the Laws of Probability Theory: the Principle of Large Numbers vs. Rational Expectations Arbitrage”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 49, 327–344.

Chen, P. (2005): “Evolutionary Economic Dynamics: Persistent Business Cycles, Disruptive Technology, and the Trade-Off between Stability and

Complexity”, in K. Dopfer (ed.), *The Evolutionary Foundations of Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 472–505.

Chen, P. (2008): “Equilibrium Illusion, Economic Complexity, and Evolutionary Foundation of Economic Analysis”, *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 5(1), 81–127.

Cox, J., Ross, S. (1976): "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process”, *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166.

De Long, J., Shleifer, A. *et al* (1990): “Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation”, *Journal of Finance*, 45, 379-395.

Engle, R.F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica,* **50** (4), 987-1007.

Fama, E.F. (1970): “Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work”, *Journal of Finance*, 25, 384–433.

Fama, E.F. (1991): “Efficient Capital Market II”, *Journal of Finance*, 46(5), 1575–1617.

Friedman, M. (1953):“The Case for Flexible Exchange Rates,” in M. Friedman, *Essays in Positive Economics,* University of Chicago Press, Chicago.

Gardiner，C.W.，*Handbook of Stachastic Methods*，Springer-Verlag，Berlin，(1985).

Hodrick, R. J. and Prescott, E. C. (1997): "Post-War US. Business Cycles: An Empirical Investigation," *Journal of Money, Credit, and Banking*, 29(1), 1-16.

Hull, J.C.(2000): *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall.

Hurst, H.E. (1951): “Long-term Storage Capacity of Reserviors,” Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116, 770-808.

Kendall, M.G. and Stuart,A. (1969): *The Advanced Theory of Statistics*，Volume 1, 3rd Ed., Griffin, London.

Keynes, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Investment, and Money,* Macmillan, London; 凯恩斯著(1999)：《就业、利息和货币通论》，高鸿业译，商务印书馆（1999）。

Kou, S. C. and Kou, S. G. (2004): “A Diffusion Model for Growth Stocks,” *Mathematics of Operations Research*, 29(2), 191-212.

Kraus, A. and Litzenberger, R. (1976): “Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets,” *Journal of Finance*, 31, 1085-1100.

Mandelbrot, B.B., van Ness, J.W. (1968): “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications,” *SIAM Review*, 10, 422-437.

Marshall, A. (1920): *The Principles of Economics*, English Language Book Society, London, 1969.

Merton, R. C. (1973):“Theory of Rational Option Pricing,” *Bell Journal of Economics and Management Science,* 4(1), 141-183

Minsky, H. (1975): John Maynard Keynes, Columbia University press, Columbia.

Minsky, H. (1982): “Inflation, Recession, and Economic Policy”, M.E. Sharp, Armonk.

Pan J. (2002): The Jump-risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-series Study, Journal of Financial Economics, 63, 3–50.

Samuelson, P.A. (1965a): “Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly,” *Industrial Management Review*, 6, 41-50.

Samuelson, P. A. (1965b): "Rational Theory of Warrant Pricing," *Industrial Management Review,* 6(2), 13-31.

Sears R., Wei K. (1985): Asset Pricing, Higher Moments, and the Market Risk Premium: A Note, Journal of Finance, 40, 1251-1253.

Shefrin, H., Statman M. (1994): Behavioral capital asset pricing theory, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29, 323-349.

Shiller, R.J. (2000): “Irrational Exuberance”, Princeton University Press.

Soros, G. (1987): *Alchemy of Finance*, Simon& Schuster, New York; 索罗斯，1999，《金融炼金术》，海南出版社。

Tang, Y.N.(2009): The Semi-Linear Expansion of Financial Time Series and the Premium of High-Order Moments，Working Paper, Center for New Political Economy, Fudan University, Shanghai

Van Kampen, N.G. (1976):“The Expansion of the Master Equation,” *Advanced Chemical Physics*, 34, 245-309.