

# 波动率微笑、相对偏差和交易策略

## ——基于非线性生灭过程的股价 波动一般扩散模型

曾 伟 陈 平\*

**摘 要** 对股票收益的波动率微笑和股票指数相对偏差稳定的观察,引入期权定价理论的新方向。描写群体行为的非线性随机过程,比几何布朗运动为主的代表者模型能更好地描写股价波动。行为金融学中,我们将投资者简化为两类不同交易策略的投资群体——反转投资者和动量投资者,引入生灭过程来直观刻画他们产生的股价涨落,并取极限得到一般扩散过程。我们建立的一般框架可以统一理解目前已经熟知的几何布朗运动、广义方差常弹性、残余波动率、利率的期限结构等理论模型,也能描写观察到的波动率微笑和稳定的相对偏差。用 S&P 500 数据对这些模型进行了参数估计和检验的结果很好;有可能在期权定价中取代流行的 Black-Scholes 模型。

**关键词** 波动率微笑, 相对偏差, 交易策略, 生灭过程, 期权定价

## 引 言

现代金融学的最高成就之一是股票价格运动基于几何布朗运动 (GBM, Geometric Brownian Motion) 的代表者模型。基于 GBM 假设的期权定价的 Black-Scholes 模型 (Samuelson, 1964; Black and Scholes, 1973) 获得了广泛的运用。但在实践中研究者们发现 GBM 假设有严重的缺陷。首先,观察到的波动率远不是简单常数,而是呈现波动率微笑 (Volatility Smile) 和波动率倾斜 (Volatility Skew) 的复杂现象。其次,随着到期期限增加,Black-Scholes 公式对期权价格的预测误差将显著增大 (可能达到 60% 以上),1987 年美国

\* 曾伟,中国投资有限责任公司;电话:13810095397;E-mail:zengwei@huijin-inv.cn。陈平,北京大学中国经济研究中心与复旦大学新政治经济学中心。通信地址:北京大学中国经济研究中心,100871;E-mail:pchen@cceer.pku.edu.cn。作者感谢宋敏、巫和懋、王红、潘家柱、王亚平、曾志雄、龚刚、杨晓光、戴民、龚强等老师对本文的建议和帮助。感谢李华俊、唐毅南、叶敏、邹传伟等同学的支持和讨论。非常感谢两位审稿人的宝贵意见。作者感谢国家自然科学基金会 70471078 号项目的资助。

股灾后 S&P500 指数的密度函数呈双峰分布 (Jackwerth and Rubinstein, 1996)。这引发了修正 GBM 模型的一系列努力。其中最著名的是 Cox and Ross (1976) 引入的方差常弹性模型 (CEV, Constant Elasticity Variance Model)。但这些模型不能摆脱 GBM 模型本身的缺陷, 从而提供一个简单的机制来描写观察到的股价运动的复杂行为。我们感到有必要寻找更一般的股价运动机制。

股价运动是经济波动的典型现象。经济周期的本质是外来噪声驱动, 还是内生涨落是尚未解决的基础问题。支持内生涨落机制的一个重要观察是相对偏差是稳定的 (Chen, 2002, 2005; 陈平, 2004)。相对偏差是标准差与平均值的比值。在随机变量具有自然原点的正值时, 它可以反映随机过程的群体特征, 比分别考察均值与方差有不同的信息, 因此在物理和生物学上有重要的应用 (Kendall and Sturart, 1963; Schrödinger, 1948)。在常用的三类随机模型中, 代表者模型 (包括 GBM 和随机游走模型) 的相对偏差在时间上是发散或衰减的, 但描写群体的生灭过程的相对偏差是稳定的 (李华俊, 2002; Chen, 2002, 2005; 陈平, 2004)。生灭过程的经济学意义是内生涨落。从数学上的方便考虑, 生灭过程已引入股价运动的描述 (Cox and Ross, 1976; Kou and Kou, 2002)。

本文突破传统金融理论单个代表者模型, 从行为金融已有的结论出发, 直观引入两类具有不同交易策略的投资群体——反转投资者和动量投资者, 用生灭过程来刻画这两类群体行为, 并取极限得到一般扩散过程, 来重新刻画股票价格的运动过程。引入两类投资群体使得股票价格的运动过程可表现出波动率微笑的特征, 且其相对偏差也与实际数据更吻合。用我们的一般扩散模型可以统一目前已知的各类模型, 如 Samuelson (1964) 建立的 GBM 模型、Cox (1976)、Emanuel and MacBeth (1982)、Reiner (1994) 建立的广义 CEV 模型及 Goldenberg (1991) 建立的残余波动率 (Residual Volatility) 模型等。我们可以看出, 这些模型只能刻画常数波动率和波动率倾斜的简单现象。我们用 S&P 500 数据对这些模型进行了参数估计和检验, 表明引入两类具有不同交易策略的投资群体的扩散模型对实际数据拟合得更好。最后, 我们比较了股票指数期权定价的结果, 实际数据证明它比标的资产服从 GBM 假设下的 Black-Scholes 定价公式预测更加准确。

本文的思路如下: 第一, 对已有的 GBM 模型的种种修正给以评述, 讨论从观察到的相对偏差的稳定性来考虑用生灭过程取代 GBM 模型的理由; 第二, 引入市场上存在采取反转策略和动量策略的两类投资者假设, 用生灭过程描述股票价格的波动; 第三, 给出它的极限扩散过程, 及其对现有修正 GBM 模型的各种努力的统一理解; 第四, 用 S&P500 股票指数实际数据对极限扩散过程进行实证分析; 第五, 将该模型运用于股票指数期权定价中; 最后是结论和展望。

## 一、几何布朗运动股价模型的问题与修正

Louis Bachelier (1900) 在他的博士论文中首次使用布朗运动描述单个股票价格的波动, 原创性地将随机模型引入了股价运行机制的研究。由于股票的价格不能为负, Paul Samuelson (1964) 对此模型进行了修正, 假设股票的收益服从布朗运动, 即股票价格服从几何布朗运动 (GBM)。自此 GBM 成为描述单个股票和股票指数价格运动的最基本的模型。<sup>1</sup> 基于标的资产服从 GBM 的假设, Fisher Black and Myron Scholes (1973) 利用无套利原理推导出了著名的 Black-Scholes 欧式期权定价公式, 使得期权定价理论成为均衡经济学和现代金融学发展的里程碑。

在期权定价理论中, 对标的资产的运动方程的假设是期权定价公式的基础。在 Black and Scholes (1973) 推出欧式期权定价公式之后, 研究者们发现基于标的资产服从最简单的波动率为常数的 GBM 假设有严重的缺陷。

观测到的波动率的复杂行为引发研究者们修正 GBM 模型的种种努力。目前修正 GBM 模型的工作可以分为三类: 确定性扩散模型 (deterministic diffusion model)、随机性扩散模型 (stochastic diffusion model) 和简单交易者规则 (naive trader rules)。确定性扩散模型是指扩散模型的漂移项和扩散项都是确定性函数; 随机性扩散模型是指漂移项或扩散项是随机的; 简单交易者规则是指交易者们计算期权价格时并非基于标的资产的某个具体模型, 而是基于已知数据的隐含波动率来直接预测未来波动率, 从而为期权定价的规则。<sup>2</sup>

在确定性扩散模型中, Cox and Ross (1976) 建立了方差常弹性模型 (CEV):  $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma S_t^{\frac{\alpha}{2}-1} dB_t$  ( $0 \leq \alpha < 2$ ) 来解释 Black (1975) 观察到的股票收益的波动率和股票价格负相关的现象。Emanuel and MacBeth (1982) 将其扩展到  $\alpha > 2$  的情形, Reiner (1994) 将其又扩展到  $\alpha < 0$  的情形; 通常将参数  $\alpha$  不受限制的 CEV 模型称为广义 CEV 模型。基于 CEV 模型, Black (1976)、Schmalense and Trippi (1978)、Beckers (1980)、Christie (1982)、Reiner (1994)、Jackwerth and Rubinstein (2001) 使用不同的数据印证了 Black 观察到的现象。一些研究者对此也试图给出一定的理论解释。Black (1976)、

<sup>1</sup> 事实上, 同时假设单个股票和股票的加权平均都服从 GBM 假设在理论上是有问题的, 但是通常人们觉得在实际应用中可以近似这么处理, 参见 John C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives* (Fourth Edition), Tsinghua University Press, 2001, p. 281。

<sup>2</sup> Duan (1995) 的 GARCH 模型并非扩散模型, 但是 Heston and Nandi (2000) 指出一些 GARCH 模型当时间的步长足够短时收敛于随机波动率模型, 因此 Jackwerth and Rubinstein (2001) 称随机波动率模型涵括了 GARCH 模型的大部分效应。

Geske (1979) 和 Christie (1982) 认为财务杠杆和营业杠杆效应是导致以上现象的可能原因。另外, Black 还认为二者之间存在着反向因果关系, 即股票收益的波动率升高会导致价格下降。CEV 模型下的股票收益的波动率表现出倾斜的现象, 对波动率为常数的 GBM 假设是一个好的改进, 在数据拟合上显示出一定的优势, 被研究者们广泛地引用和应用。然而, 它仍不能解释著名的波动率微笑现象。

Goldenberg (1991) 发现方差常弹性对实际数据并不很适合, 他建立了残余波动率模型:  $dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\sigma^2 S_t^2 + \gamma} dB_t$ , 并且得出了解析形式的欧式期权定价公式, 然而, 股票收益的波动率非常弹性并没有改变波动率单调下降的性质, 仍不能解释波动率微笑的特征。

另外两类著名的确定性扩散模型——转移扩散模型 (Displaced Diffusion Model, Rubinstein, 1983) 和跳跃扩散模型 (Jump Diffusion Model, Merton, 1976), 前者能产生波动率倾斜特征, 后者能产生一定的波动率微笑特征。然而, 二者在所有的检验中与 GBM 假设下的 Black-Scholes 公式得到的结果非常接近, 并且后者不够灵活, 不能产生与 Black-Scholes 公式显著不一样的波动率微笑特征 (Jackwerth and Rubinstein, 2001)。

此外, 在标的资产的价格与波动率不相关的情形下, 随机波动率模型 (Stochastic Volatility Model, Heston, 1993) 可以解释波动率微笑现象。但是, 一方面, 随机波动率模型未给出模型设置的微观机制; 另一方面, Jackwerth and Rubinstein (2001) 指出, 随机波动率模型并非显著地好于广义 CEV 模型。

以上模型尽管越来越复杂, 却很少能够给出波动率微笑的简单解释。跳跃扩散模型和随机波动率模型有唯象 (phenomenological) 的描写, 但没有微观机制。经验分析上, 这三类模型都没有显著地优于广义 CEV 模型。

另一方面, 根据 Chen (2002)、李华俊 (2002) 和陈平 (2004) 的研究发现, GBM 假设的相对偏差<sup>3</sup>随时间是以指数的速度发散的:

$$RD_M(t) \triangleq \frac{\text{std}(r_M(t))}{E(r_M(t))} = \sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1},$$

其中  $\sigma$  是 GBM 假设的波动率,  $\text{std}(\cdot)$  表示随机变量的标准差,  $E(\cdot)$  表示随机变量的均值,  $RD_M(t)$  表示标的资产  $M$  在时间长度为  $t$  时的相对偏差,  $r_M(t)$  表示标的资产  $M$  在时间长度为  $t$  时的收益率。本文利用美国 S&P500 指数自 1926 年至 2004 年的月度数据对其相对偏差进行估计, 结果如下:

<sup>3</sup> 相对偏差的定义和条件由 Kendall and Stuart(1963) 给出。对许多物理学与经济学的正随机变量, 例如能量、粒子数、人口、价格等, 考察相对偏差比单独考察期望和标准差更有意义。

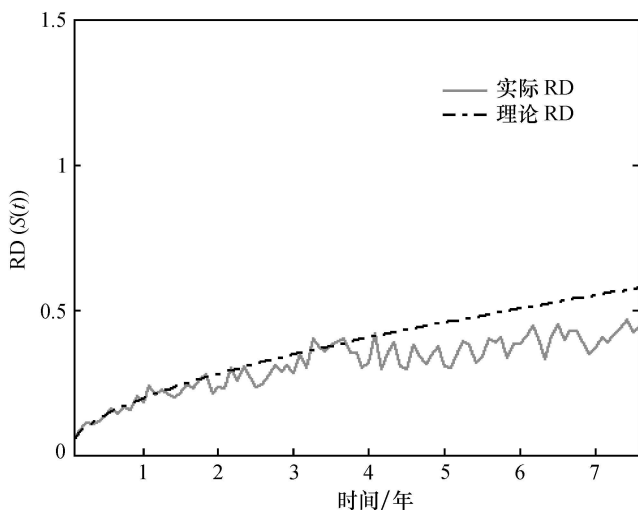


图1 S&P 500 指数的相对偏差的实际值和理论值

注：图1横轴为时间，单位为年，纵轴实线表示S&P 500指数实际数据估计的相对偏差，虚线表示几何布朗运动假设下的股票指数的相对偏差。

从图1可以看出，S&P 500指数的相对偏差并非如GBM假设所预言是指数发散的，而是几乎渐近稳定的。同时，李华俊（2002）和陈平（2004）指出用生灭过程来描述股票价格运动是一个合适的选择，并且证明线性生灭过程的相对偏差随时间是渐进稳定的。事实上，Cox and Ross（1976）、Kou and Kou（2002）也曾使用生灭过程来描述股票价格运动。

## 二、基于反转和动量策略两类投资者的非线性生灭过程建模

### （一）生灭过程对股票收益率的一般描述

当把 $T$ 看做时间指标，我们可以将随机过程 $\{X_t; t \in T\}$ 按照 $T$ 是否连续分为离散时间和连续时间两类。我们也可以按照随机过程的状态空间是否连续，将其分为离散状态和连续状态两类。数学上选择离散或连续的数学表象取决于要描写的现象。数学上的离散空间不等价于真实物理的离散空间，只是建模的简化假设。通常的计量经济学模型的状态是连续的，而时间是离散的。但物理学模型时间是连续的，状态可以是离散或连续的。我们选择时间连续状态离散的生灭过程，是因为目前已知的随机过程中，只有生灭过程的相对偏差是稳定的。时间与状态都连续的几何布朗运动的相对偏差是爆炸的，而时间离散状态连续的随机游走模型的相对偏差是收敛的（Chen, 2002；李华俊，2002；陈平，2004）。所以，我们偏爱生灭过程比数学家的方便假设更进

一步,只有产生经验观察到的稳定的相对偏差,才会有可持续的风险波动的金融市场。

实际上,我们观察到的股价并不是连续状态的随机过程。股价的状态空间被限制为离散值,在市场上股价的变动有最小单位,通常是1/32(美)分。因此,股票收益率是连续时间、离散状态的随机过程,我们很自然地想到用跳过程来描述它。

通常人们在研究一个包含大量粒子或个体的系统的群体行为时,用跳过程来描述也是非常合适的。在这种过程中,我们可以观察到一定限度的确定性运动,同时伴随着随机的涨落。但是,这种确定性的趋势和随机的涨落都是直接来源于对这个跳过程的同一描述。从这一角度看,若我们选择相对偏差视角,那么用跳过程来描述股票价格运动可能要比直接用扩散过程描述来得更自然,因为扩散过程中代表确定性趋势的漂移项和代表随机涨落的扩散项是分别构造的。

我们考虑用一般的生灭过程来对股票收益率建模,它的每一步跳跃的单位是1,则股票价格 $S_t$ 的收益 $\Delta \ln S_t$ 满足:

$$\Delta \ln S_t = \begin{cases} 1, & \text{with prob. } b(S_t)\Delta t + o(\Delta t), \\ 0, & \text{otherwise,} \\ -1, & \text{with prob. } d(S_t)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \quad (1)$$

即单位时间 $\Delta t$ 内股票收益率上升一单位的概率为 $b(S_t)\Delta t + o(\Delta t)$ ,下降一单位的概率为 $d(S_t)\Delta t + o(\Delta t)$ ,保持不变的概率为 $1 - (b(S_t) + d(S_t))\Delta t - o(\Delta t)$ 。

## (二) 引入采取反转策略和动量策略的两类投资者非线性生灭过程模型

投资者行为研究可分为两个层次:第一个层次是个体行为,第二个层次是群体行为。投资者群体行为分析就是侧重于分析投资者行为相互依存、相互影响条件下的群体行为。

我们采用一类专门用来描述群体行为的随机过程——生灭过程来描述股票收益的运动过程。行为金融学中熟知负反馈策略和正反馈策略两类投资者(Delong *et al.*, 1990a, 1990b)。我们假设市场上仅存在两类投资者:“反转投资者”(Contrarian Investors)和“动量投资者”(Momentum Investors),并对这两类投资者的交易策略进行建模,我们得到了一簇非线性生灭过程。

我们考虑股票价格处于“基本价值”附近的投资者行为,对市场投资者有以下假设:

(1) 市场上仅存在两类人群按不同策略进行投资:第I类投资者遵循反转策略;第II类投资者遵循动量策略;

(2) 每一类投资者 $i(i=1,2)$ 按照自己的策略对股票收益率 $\Delta \ln S_t$ 上升或

下降一单位有一个主观概率 $(b_i(S_t), d_i(S_t), i=1, 2)$ ，并且按照主观概率进行交易，从而最终影响到股票收益率的波动；

(3) 最终股票收益率客观上升和下降一单位的概率为两类投资者各自的主观概率的简单加权平均<sup>4</sup>，假设反转投资者所占的比例为 $\omega^5$ ，动量投资者占比为 $1-\omega$ ，那么股票收益率最终上升和下降一单位的概率为：

$$\begin{cases} b(S_t) = \omega b_1(S_t) + (1-\omega)b_2(S_t), \\ d(S_t) = \omega d_1(S_t) + (1-\omega)d_2(S_t). \end{cases}$$

我们假设：资产价格的波动偏离“基本价值”不远。“基本价值”由公司的基本面（经营情况、盈利水平、产品和技术等）决定。两类投资者供求关系的竞争导致价格对基本价值的波动。两类投资者的行为在下面模型中用投资者主观概率幂函数指数 $\alpha, \beta$ 以及表示他们资金比例权重系数 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2$ 体现。为了建模的可操作性，模型中我们暂不考虑对“基本价值”建模，而是简单假设基本价值的趋势为零。股价波动相当于实际数据趋势分离后的波动分量。这是本模型理论抽象和分析简化的主要特点。

反转策略通常是指在股票价格上涨时卖出，下跌时买入，即通常所说的“涨卖跌买”。传统文献中反转策略投资者当期卖出和买进是以股票前一期价格的增量为判断依据的。本模型中的反转策略投资者当期卖出和买进以股票前一期价格的绝对值为判断依据，即价格高时卖出，价格低时买进，即市场熟知的“高抛低吸”（buy low sell high）策略，这在行为金融学中更为合理。事实上，当资产价格处于“基本价值”附近时，反转策略与“高抛低吸”策略一致。投资者通常以“基本价值”作为比较的基准点，觉得“涨”的股票价格就比较“高”，“跌”的股票价格就比较“低”。从概率的角度看，反转投资者对股票价格收益上升和下降一单位的主观概率有如下规律：股票价格越高，他认为收益上升的概率越小，下降的概率越大；股票价格越低，他认为收益上升的概率越大，下降的概率越小。所以我们也无须引入均值反转的绝对幅度，用概率分布更为一般合理。

动量策略通常是指在资产价格上涨时买入，下跌时卖出，即通常所说的“追涨杀跌”。与上面的描述类似，当资产价格处于“基本价值”附近时，动量投资者对股票价格收益上升和下降一单位的主观概率与反转投资者正好相反：股票价格越高，他认为收益上升的概率越大，下降的概率越小；股票价

<sup>4</sup> 因为这里假设每一类投资者按照各自的主观概率判断进行交易，所以主观概率最终表现为客观概率。在这里我们排除主观信念和客观行为不一致的现象。

<sup>5</sup> 这里的比例是按照两类投资群体各自在真实交易中投入的资金所占的比例。这一比例具有重要的政策指导含义，它表明了反转策略投资者在资本市场中所占的比重，它会随着时间而变化，对监管者制定政策是一个非常重要的参照指标。但是在后面我们会发现，要在实际数据中把这一指标估计出来，需要对每一类投资者的主观概率空间有更严格的限制条件，否则参数的个数 $(\omega, b_1, d_1, b_2, d_2)$ 将多于能够被估计出来的参数的个数 $(\lambda, \mu, \delta^2, \sigma^2)$ 。

格越低,他认为收益上升的概率越小,下降的概率越大。

下面的图2直观地表达了两类投资者对股票收益率上升和下降的主观概率:

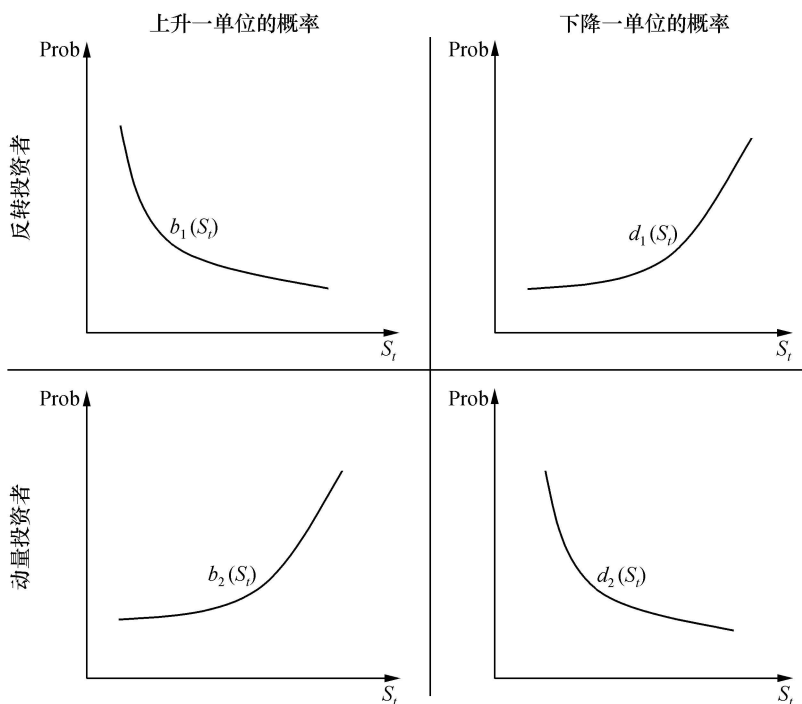


图2 两类投资者对股票收益率上升或下降一单位的主观概率假设

注:图2第一行两个图形描述的是反转投资者的概率判断,第二行两个图形描述的是动量投资者的概率判断;第一列是两类投资者对股票收益率上升一单位的主观概率函数,第二列是他们对股票收益率下降一单位的主观概率函数。四个图形的横坐标都是股票价格的水平,纵坐标是主观概率函数。

为简单起见,我们不妨假设主观概率的密度函数为幂函数形式:

$$\begin{cases} b_1(S_t) = b_1 S_t^{-\beta}, \\ d_1(S_t) = d_1 S_t^\alpha, \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} b_2(S_t) = b_2 S_t^\alpha, \\ d_2(S_t) = d_2 S_t^{-\beta}, \end{cases} \quad (2b)$$

$$(b_1, b_2, d_1, d_2, \alpha, \beta \geq 0),$$

其中为了简单,两类投资者使用了对称的幂指数形式。

从而,股票收益率上升和下降一单位的概率密度函数如下:

$$\begin{cases} b(S_t) = \tilde{b}_1 S_t^{-\beta} + \tilde{b}_2 S_t^\alpha, \\ d(S_t) = \tilde{d}_1 S_t^\alpha + \tilde{d}_2 S_t^{-\beta}, \end{cases} \quad (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \alpha, \beta \geq 0), \quad (3)$$



其中  $\tilde{b}_1 = \omega b_1$ ,  $\tilde{d}_1 = \omega d_1$ ,  $\tilde{b}_2 = (1-\omega)b_2$ ,  $\tilde{d}_2 = (1-\omega)d_2$ 。

李华俊 (2002) 和陈平 (2004) 已证明线性生灭过程的相对偏差是渐进稳定的。而在本文第三部分我们将看到, 李华俊和陈平的线性生灭过程的极限扩散过程是本文中当  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ ,  $\sigma=0$  时的特殊情形; 同时, GBM 模型是当  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$  时的特殊情形。因此, 我们可以预测 (3) 式的相对偏差应该介于渐进稳定和指数发散之间的中间状态。而图 1 也显示 S&P 500 指数的相对偏差随着时间增加, 比较平稳但带有微弱上升趋势, 与 (3) 式的预测基本吻合。

### 三、生灭过程的极限扩散过程

现在我们考虑无限小的增长过程  $d\ln S_t$  并令跳跃的步长为  $\Delta u$ , 生灭过程表示如下:

$$d\ln S_t = \begin{cases} \Delta u, & \text{with prob. } [\tilde{b}_1 S_t^{-\beta} + \tilde{b}_2 S_t^\alpha] \cdot dt + o(dt), \\ 0, & \text{otherwise,} \\ -\Delta u, & \text{with prob. } [\tilde{d}_1 S_t^\alpha + \tilde{d}_2 S_t^{-\beta}] \cdot dt + o(dt). \end{cases}$$

$d\ln S_t$  的条件均值为  $[(\tilde{b}_1 - \tilde{d}_2) S_t^{-\beta} + (\tilde{b}_2 - \tilde{d}_1) S_t^\alpha] \Delta u \cdot dt + o(dt)$ , 条件方差为  $[(\tilde{b}_1 + \tilde{d}_2) S_t^{-\beta} + (\tilde{b}_2 + \tilde{d}_1) S_t^\alpha] (\Delta u)^2 \cdot dt + o(dt)$ 。如果我们取  $\Delta u$  以下面的方式趋于零:  $(\tilde{b}_1 - \tilde{d}_2)(\Delta u) \rightarrow \mu$ ,  $(\tilde{b}_2 - \tilde{d}_1)(\Delta u) \rightarrow \lambda$ ,  $(\tilde{b}_1 + \tilde{d}_2)(\Delta u)^2 \rightarrow \delta^2$ ,  $(\tilde{b}_2 + \tilde{d}_1)(\Delta u)^2 \rightarrow \sigma^2$ , 那么它的极限扩散过程满足:

$$\begin{aligned} E(d\ln S_t | F_t) &= (\lambda S_t^\alpha + \mu S_t^{-\beta}) dt, \\ \text{Var}(d\ln S_t | F_t) &= (\sigma^2 S_t^\alpha + \delta^2 S_t^{-\beta}) dt. \end{aligned}$$

在上面的参数设定下, 直观上上面的生灭过程将收敛为以下的扩散过程:

$$\begin{aligned} d\ln S_t &= (\lambda S_t^\alpha + \mu S_t^{-\beta}) dt + \sqrt{\sigma^2 S_t^\alpha + \delta^2 S_t^{-\beta}} dB_t, \\ S_0 &> 0 \quad (\alpha, \beta \geq 0). \end{aligned} \quad (4a)$$

下面的命题将给出证明。

**命题 1** 设生灭过程序列  $\ln S_t(n)$  初值为  $\ln S_0(n) = \frac{n \ln S_0}{n}$ , 并且满足:

$$d\ln S_t(n) = \begin{cases} 1/n, & \text{with prob. } \{[\tilde{b}_1(n) S_t^{-\beta}(n) \\ \quad + \tilde{b}_2(n) S_t^\alpha(n)] \cdot dt + o(dt), \\ 0, & \text{otherwise,} \\ -1/n, & \text{with prob. } \{[\tilde{d}_1(n) S_t^\alpha(n) \\ \quad + \tilde{d}_2(n) S_t^{-\beta}(n)] \cdot dt + o(dt). \end{cases}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 以如下的方式取  $\tilde{b}_1(n), \tilde{b}_2(n), \tilde{d}_1(n), \tilde{d}_2(n)$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{b}_1(n) - \tilde{d}_2(n))/n &\rightarrow \mu, & (\tilde{b}_2(n) - \tilde{d}_1(n))/n &\rightarrow \lambda, \\ (\tilde{b}_1(n) + \tilde{d}_2(n))/n^2 &\rightarrow \delta^2, & (\tilde{b}_2(n) + \tilde{d}_1(n))/n^2 &\rightarrow \sigma^2, \end{aligned}$$

则  $\ln S_t(n)$  在 Stone's 拓扑意义下在  $D[0, \infty)$  (表示  $[0, \infty)$  上右连续左极限存在的随机函数空间) 上弱收敛于  $\ln S_t$ , 其中  $\ln S_t$  是满足 (4a) 式的扩散过程。

对命题 1 的证明见附录。

事实上, 我们只需这样取参数即可:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1(n) &= \frac{\delta^2}{2}n^2 + (a_1 + \mu)n + o(n), \\ \tilde{b}_2(n) &= \frac{\sigma^2}{2}n^2 + (a_2 + \lambda)n + o(n), \\ \tilde{d}_1(n) &= \frac{\sigma^2}{2}n^2 + a_2n + o(n), \\ \tilde{d}_2(n) &= \frac{\delta^2}{2}n^2 + a_1n + o(n), \quad \text{其中 } a_1, a_2, a_3 \in R. \end{aligned}$$

在生灭过程的指引下, 我们得到了描述股票价格的随机微分方程 (4a), 它等价于:

$$dS_t = \left[ \left( \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t^{\alpha+1} + \left( \mu + \frac{\delta^2}{2} \right) S_t^{-\beta+1} \right] dt + \sqrt{\sigma^2 S_t^{\alpha+2} + \delta^2 S_t^{-\beta+2}} dB_t$$

( $\alpha, \beta \geq 0$ ). (4b)

显然, 此过程将 GBM 模型、广义 CEV 模型、残余波动率模型作为它的特例。同时我们也注意到它在漂移项上的灵活性使它也可以描述均值回归过程, 因此也包含了著名的描述利率期限结构的 CIR 过程 ( $\alpha=0, \beta=1, \sigma=0$ ; Cox, Ingersoll and Ross, 1985)。另一个突出的特点是, 这一随机微分方程的漂移项和扩散项是在对跳过程的描述过程中内生地、同时地产生的, 而不是如以前所有的传统那样, 对漂移项和扩散项分别人为地构造。<sup>6</sup>

## 四、对极限扩散过程的实证分析

本文取 S&P 500 指数, 跨度从 1991 年 1 月 2 日至 1997 年 12 月 31 日共七年的日度时间序列, 1771 个数据点, 处于美国的一个经济周期之内。数据来源于 [www.yahoo.com/finance](http://www.yahoo.com/finance)。指数的红利已经调整, 所以本文直接使用该 S&P 500 指数时间序列。

下面将估计极限扩散过程 (5a, 5b, 5c) 的参数, 并与 GBM 模型、广义

<sup>6</sup> Cox (1975) 说, 他的 CEV 模型通过预先特别设定, 而不是从微观机制和市场数据出发来确定股票价格与波动率之间精确的函数关系。

CEV 模型及残余波动率模型作比较。

$$d\ln S_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dB_t \quad (\alpha, \beta \geq 0), \quad (5a)$$

其中

$$\mu(S_t) = \lambda S_t^\alpha + \mu S_t^{-\beta}, \quad (5b)$$

$$\sigma^2(S_t) = \sigma^2 S_t^\alpha + \delta^2 S_t^{-\beta}, \quad (5c)$$

要估计里面的六个参数  $\alpha, \beta, \sigma, \delta, \lambda, \mu$ 。所用数据为  $S_t$  的时间序列，设为  $S_i (i=1, \dots, N)$ ，采样间隔设为  $\Delta$ 。

### (一) 对扩散项和漂移项的非参数估计

我们分两步来估计四种模型的参数。第一步使用非参数估计方法中的局部线性估计方法 (Fan and Yao, 1998)，先将  $\mu(S_t)$ 、 $\sigma^2(S_t)$  的估计值  $\hat{\mu}(S_t)$ 、 $\hat{\sigma}^2(S_t)$  估计出来。令  $Y_i = (\ln S_{i+1} - \ln S_i) / \Delta$ ，( $i=1, \dots, N-1$ )，则 (5a) 式可改写如下：

$$Y_i = \mu(S_i) + \sigma(S_i)\varepsilon_i / \sqrt{\Delta}, \quad (6a)$$

其中  $\varepsilon_i$  是高斯白噪声。下面利用局部线性估计方法先估计出  $\hat{\mu}(S_i)$ ，然后代入估计出  $\hat{\sigma}^2(S_i)$ 。令  $\hat{\mu}(S_i) = a_i$ ，为满足下面带权重的最小二乘问题的局部线性估计：

$$(\hat{a}_i, \hat{b}_i) = \arg \min_{a_i, b_i} \sum_{j=1}^{N-1} \{Y_j - a_i - b_i(S_j - S_i)\}^2 K\left(\frac{S_j - S_i}{h_2}\right), \quad (7)$$

其中  $K(\cdot)$  是实数域上的核函数， $h_2 > 0$  是带宽。(6a) 式等价于：

$$Y_i \sqrt{\Delta} = \mu(S_i) \sqrt{\Delta} + \sigma(S_i)\varepsilon_i,$$

记残差的平方为  $\hat{r}_i = \Delta \{Y_i - \hat{\mu}(S_i)\}^2$ 。这样就能得到基于残差的估计值  $\hat{\sigma}^2(S_i) = \hat{v}_i$ ：

$$(\hat{v}_i, \hat{\omega}_i) = \arg \min_{\hat{v}_i, \hat{\omega}_i} \sum_{j=1}^{N-1} \{\hat{r}_j - \hat{v}_i - \hat{\omega}_i(S_j - S_i)\}^2 W\left(\frac{S_j - S_i}{h_1}\right). \quad (8)$$

其中  $W(\cdot)$  是实数域上的核函数， $h_1 > 0$  是带宽。从而我们得到  $\mu(S_i)$ 、 $\sigma^2(S_i)$  的估计值  $\hat{a}_i, \hat{v}_i$  (或  $\hat{\mu}(S_i)$ 、 $\hat{\sigma}^2(S_i)$ )。具体计算中  $K(\cdot)$ 、 $W(\cdot)$  通常取 Epanechnikov 核函数，带宽  $h_1, h_2$  依照 Fan and Yao (1998) 文章所建议的取值。非参数估计结果如下：

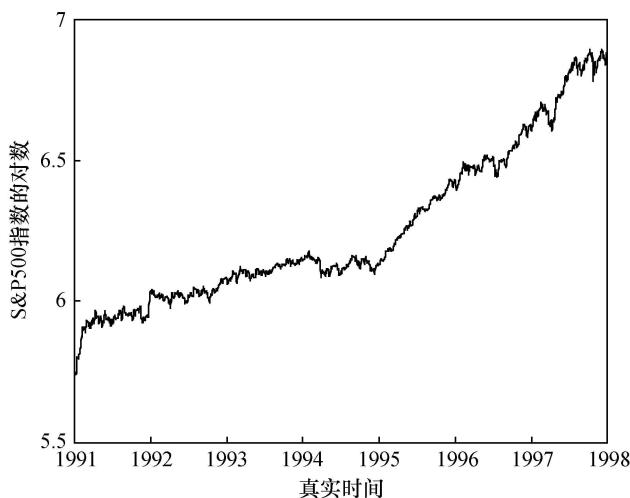


图3 S&P 500 指数的对数时间序列

注：图3的横坐标是真实时间，单位是年，纵坐标是S&P 500指数的对数。

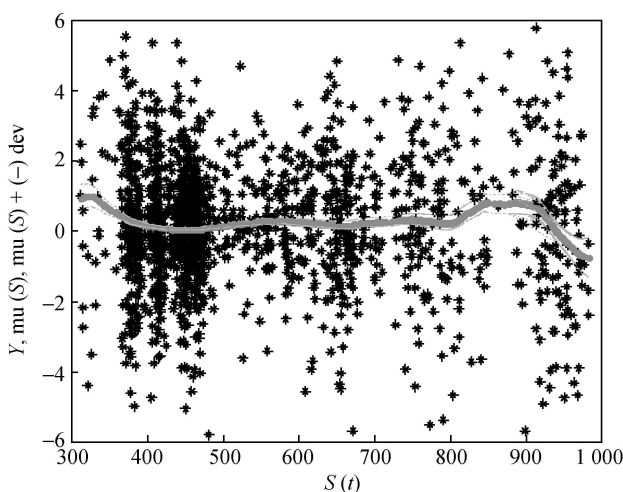


图4 漂移项的局部线性估计

注：图4的横坐标是股票指数，“\*”表示 $Y_i = (\ln S_{i+1} - \ln S_i) / \Delta$ ，“·”表示漂移项的局部线性估计值 $\hat{\mu}(S_i)$ ，“-”表示漂移项估计值 $\hat{\mu}(S_i) + (-)$ 一个标准差。

## (二) 四个模型参数估计的比较

极限扩散模型(4a)包含了一些著名的模型：GBM模型、广义CEV模型及残余波动率模型。若是GBM，则 $\alpha = \beta = 0$ ， $\mu(S_t) = \lambda + \mu$ ， $\sigma(S_t) = \sqrt{\sigma^2 + \delta^2}$ ；若是广义CEV模型，则 $\beta = \delta = 0$ ， $\lambda + \frac{\sigma^2}{2} = 0$ ， $\mu(S_t) = \lambda S_t^\alpha + \mu$ ，

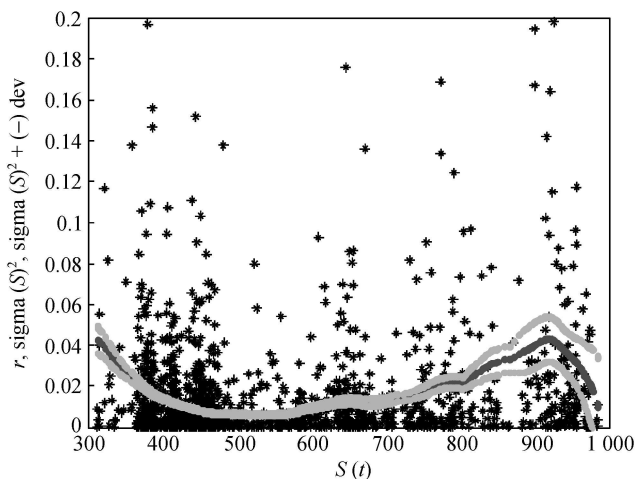


图 5 扩散项平方的局部线性估计

注：图 5 的横坐标是股票指数，“\*”表示  $\hat{r}_i = \Delta\{Y_i - \hat{\mu}(S_i)\}^2$ ，“·”表示扩散项平方的局部线性估计值  $\hat{\sigma}^2(S_i)$ ，“.”表示扩散项平方估计值  $\hat{\sigma}^2(S_i) + (-)$  一个标准差。

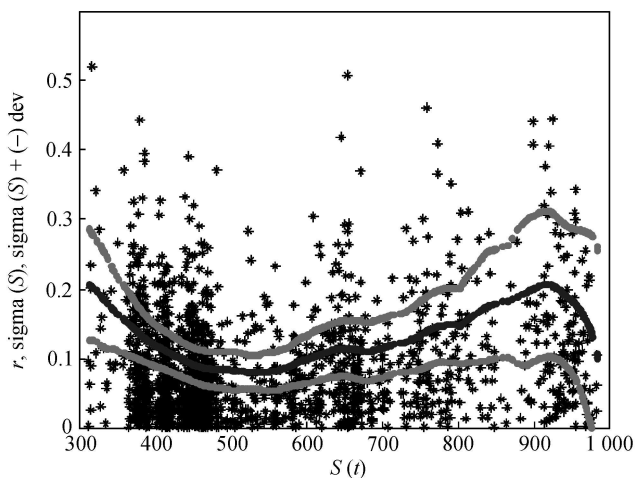


图 6 扩散项的局部线性估计

注：图 6 的横坐标是股票指数，“\*”表示  $\sqrt{\hat{r}_i} = \sqrt{\Delta}|Y_i - \hat{\mu}(S_i)|$ ，“·”表示扩散项的局部线性估计值  $\hat{\sigma}(S_i)$ ，“.”表示扩散项平方估计值  $\hat{\sigma}(S_i) + (-)$  一个标准差。

$\sigma(S_i) = \sigma S_i^{\frac{\alpha}{2}}$ ，或者  $\alpha = \sigma = 0$ ， $\mu + \frac{\delta^2}{2} = 0$ ， $\mu(S_i) = \lambda + \mu S_i^{-\beta}$ ， $\sigma(S_i) = \delta S_i^{-\frac{\beta}{2}}$ 。若是残余波动率模型，则  $\alpha = 0$ ， $\beta = 2$ ， $\mu + \frac{\delta^2}{2} = 0$ ， $\mu(S_i) = \lambda + \mu S_i^{-2}$ ， $\sigma(S_i) = \sqrt{\sigma^2 + \delta^2 S_i^{-2}}$ 。

我们将使用约束非线性最小二乘法，估计出 (5b)、(5c) 中的参数  $\alpha$ ， $\beta$ ， $\sigma$ ， $\delta$ ， $\lambda$ ， $\mu$ ；然后将估计结果与其他三种模型作比较。

(5b)、(5c)的估计式如下:

$$\hat{a}_i = \lambda S_i^\alpha + \mu S_i^{-\beta} + \eta_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\alpha, \beta \geq 0), \quad (6b)$$

$$\hat{v}_i = \sigma^2 S_i^\alpha + \delta^2 S_i^{-\beta} + \nu_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\alpha, \beta \geq 0). \quad (6c)$$

因为残差的关系非常复杂,这里可以认为分成两个独立的回归。又由于在期权定价中代表波动率的(6c)极其重要,而(6b)是可以被忽略的,所以我们使用约束非线性最小二乘法首先估计出(6c)中的参数,设其估计值为 $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\delta}$ 。然后,将估计值 $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ 代入(6b),使用无截距线性最小二乘法估计出 $\lambda$ ,  $\mu$ 。

而对于其他三种模型,则可以化成简单的线性回归进行估计、拟合。下面的图7直观地展示了四种模型对扩散项的拟合效果,极限扩散模型(4a)显示出优越性,其对标的资产价格的“微笑”特征将使其能够更好地描述波动率微笑的现象。<sup>7</sup>

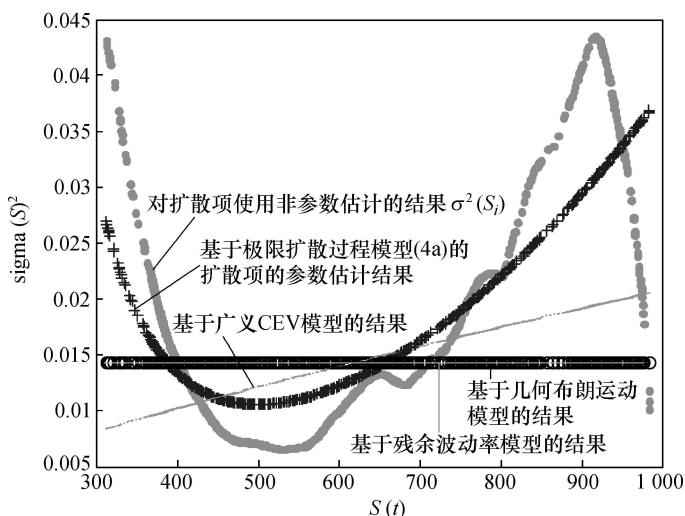


图7 四种模型对扩散项平方参数估计的拟合图

注:图7横坐标是股票指数水平

下面的表1将列出四种模型下对扩散项(4c)的估计结果:

<sup>7</sup> 波动率微笑是描述期权的隐含波动率与不同执行价格  $K$  之间的关系。本文的模型没有给出对此的直接事实,主要原因是因为模型(4a)的数值求解期权价值比较复杂。但是理论上,用数值方法计算时,随着标的资产价格远离  $S_{\min}$  (设  $S_{\min}$  是函数  $\sqrt{\sigma^2 S_t^\alpha + \delta^2 S_t^{-\beta}}$  取最小值时的  $S$  值),标的资产的收益率  $\ln S$  的跳跃步长  $\sqrt{\sigma^2 S_t^\alpha + \delta^2 S_t^{-\beta}} \sqrt{\Delta t}$  将逐渐增大,风险也将逐渐增大,所以,当执行价格  $K$  远离  $S_{\min}$  时,其对应的期权价值也将比波动步长维持最小值  $\sqrt{\sigma^2 S_{\min}^\alpha + \delta^2 S_{\min}^{-\beta}}$  时的价值要大,从而根据 Black-Scholes 公式计算出来的隐含波动率将逐渐增大,形成微笑形状。数据拟合上,本文也从波动率误差降低(图7和图8、图9)分别间接地说明了这一点。

表1 四种模型的扩散项的参数估计比较

参数	GBM 模型	广义 CEV 模型	残余波动率模型	极限扩散模型
$\alpha$	<b>0</b>	0.7787	<b>0</b>	2.6102
$\beta$	<b>0</b>	<b>0</b>	2	3.7305
$\sigma$	0.1196	0.0098	0.1196	2.3714e-005
$\delta$	<b>0</b>	0	0	7.1007e+003
R-square	—	0.2433	—	0.4989

注：粗体“0”是模型的假设。残余波动率模型在该数据下的估计结果与几何布朗运动无差别。

估计结果表明，引入反转投资者和动量投资者两类投资群体的极限扩散模型比其他三类模型更好地描述了股票价格的行为过程，这一优点将在期权定价上有重要应用。

## 五、极限扩散模型在期权定价中的应用

### （一）极限扩散模型下股票期权的简易定价方法

在股票价格服从（4a）式的引入两类采取不同交易策略的投资者的极限扩散模型下，标准地计算期权的价格  $V_{BD}^j$  应该遵循以下步骤：（1）首先用  $S_j$  之前的股价数据，根据第五部分介绍的方法估计出模型（4a）的参数；（2）由于期权定价公式没有解析解，用数值方法计算出期权在  $S_j$  处的价格  $V_{BD}^j$ 。

但是这一标准求解股票期权价格的过程过于复杂，因为它需要首先估计出模型的参数，然后用数值方法求得期权价格。不仅非线性的数值方法非常烦琐，而且由于数值方法需要用到前一阶段的参数估计值，会造成二次误差的可能。所以，在实际应用过程中，为了使过程简便，我们采取了一种权宜的简易方法：（1）在扩散模型（4a）下，先使用  $S_j$  之前的股价数据，估计出扩散项  $\sigma(S_t) = \sqrt{\sigma^2 S_t^\alpha + \delta^2 S_t^{-\beta}}$  的参数；（2）利用估计出来的参数向后预测  $S_j$  处的扩散项  $\hat{\sigma}_{BD}^j \triangleq \sigma(S_j)$ ；（3）直接用  $\hat{\sigma}_{BD}^j$  的数值代入到标准 Black-Scholes 公式替代 GBM 假设下的常数  $\sigma_{GBM}$ ，计算出期权在  $S_j$  处的价格  $\hat{V}_{BD}^j$ 。当然，这种简易方法计算出来的期权价格  $\hat{V}_{BD}^j$  与前面介绍的标准方法计算出来的价格  $V_{BD}^j$  可能会有些许差别，但是我们更倾向于用简易方法来为股票期权定价。

### （二）极限扩散模型期权简易定价法和 GBM 假设下 Black-Scholes 公式的比较

根据 Black-Scholes 公式，在其他变量确定的情形下，期权价格  $V_{Real}$  与隐含波动率  $\sigma_{Real}$  是一一对应的。通常在比较不同期权定价模型  $i$  的优劣时，我们

不是直接比较在不同模型下计算出的期权价格  $V_i$  与真实价格  $V_{\text{Real}}$  的误差大小, 比如:

$$\text{Error}_i = \| V_i - V_{\text{Real}} \| = \sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (V_i^j - V_{\text{Real}}^j)^2},$$

而是将不同模型下计算出的期权价格  $V_i$  通过标准 Black-Scholes 公式换算成隐含波动率  $\sigma_i$ , 然后比较不同模型下期权隐含波动率与真实隐含波动率  $\sigma_{\text{Real}}$  之间的误差大小, 如:

$$\text{Error}_i = \| \sigma_i - \sigma_{\text{Real}} \| = \sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (\sigma_i^j - \sigma_{\text{Real}}^j)^2}. \quad (9)$$

下面我们将通过实际数据证明, 在极限扩散模型 (4a) 下, 使用简易方法计算的期权价格的隐含波动率  $\hat{\sigma}_{\text{BD}}$  在 (9) 式的意义下比在 GBM 假设下的隐含波动率  $\sigma_{\text{GBM}}$  误差更小, 从而说明前者在期权定价中表现更优秀。

本文取 1988 年 1 月 4 日至 1993 年 12 月 31 日共 5 年的 S&P 500 指数日度数据和 1993 年交易的所有 S&P 500 股指期权数据。<sup>8</sup> 其中 S&P 500 股指日度数据来源与上部分相同; 股指期权数据共包括 14 431 只, 描述变量包括股指期权的日期、距离到期期限的天数  $T$ 、执行价格  $K$ 、股票指数  $S_t$ 、当时的无风险利率  $r_t$  和在 GBM 假设下经过标准 Black-Scholes 公式换算的隐含波动率  $\sigma_{\text{Real}}$ 。

在股票价格服从 (4a) 式的极限扩散模型下, 根据该部分第 (一) 节中的期权简易定价方法, 隐含波动率  $\hat{\sigma}_{\text{BD}}^j$  的估计可以直接按以下步骤求得: (1) 首先用  $S_j$  之前的一定时间窗口的股指数据, 根据第四部分介绍的方法估计出模型 (4a) 的参数; (2) 利用估计出来的参数 ( $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}_j, \hat{\delta}_j$ ), 向后预测  $S_j$  处的扩散项  $\hat{\sigma}_{\text{BD}}^j \triangleq \sigma(S_j) = \sqrt{\hat{\sigma}_j^2 S_j^{\hat{\alpha}_j} + \hat{\delta}_j^2 S_j^{-\hat{\beta}_j}}$ 。

在 GBM 假设下, 计算隐含波动率  $\sigma_{\text{GBM}}$  是用一定时间窗口 (TW) 下的股票价格的历史数据来预测的。其估计方法如下: 令  $u_k = \ln S_k - \ln S_{k-1}$ ,  $\Delta t$  为以年为单位的时间间隔长度, 则

$$\sigma_{\text{GBM}} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}} \times \sqrt{\frac{1}{\text{TW}-1} \sum_{k=j-\text{TW}}^{j-1} u_k^2 - \frac{1}{\text{TW}(\text{TW}-1)} \left( \sum_{k=j-\text{TW}}^{j-1} u_k \right)^2}.$$

两种模型下的隐含波动率比较的实证结果如下:

<sup>8</sup> 感谢北京大学光华管理学院王亚平老师提供的数据, 该数据被研究者广泛使用。



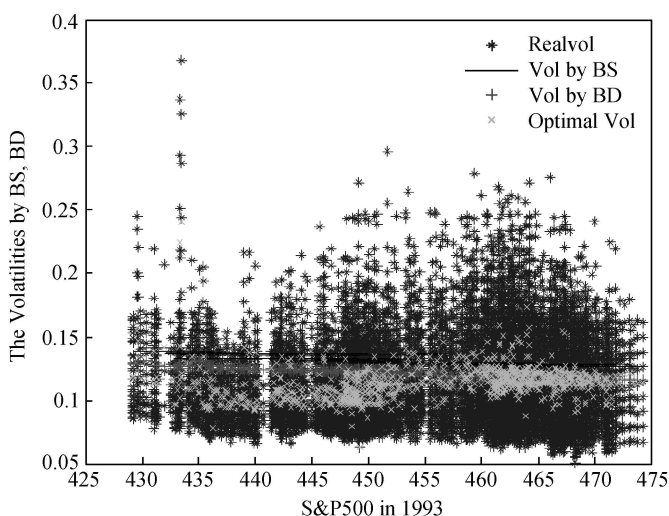


图8 隐含波动率误差比较 A

注：图8计算隐含波动率 $\bar{\sigma}_{BD}$ 和 $\sigma_{GBM}$ 用的时间窗口均是5年。图中“\*”表示真实的隐含波动率 $\sigma_{Real}$ ，“—”表示几何布朗运动假设下估计出来的隐含波动率 $\sigma_{GBM}$ ，“+”表示基于行为金融的扩散模型假设下估计出来的隐含波动率 $\bar{\sigma}_{BD}$ ，最后“×”表示使误差最小的隐含波动率。

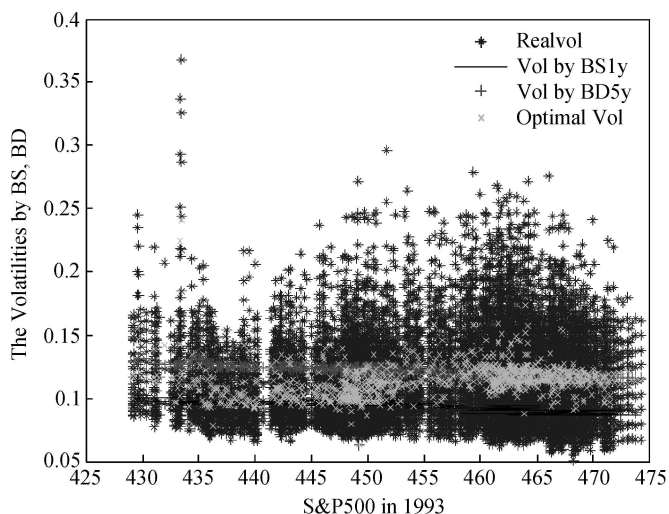


图9 隐含波动率误差比较 B

注：图9计算隐含波动率 $\bar{\sigma}_{BD}$ 用的时间窗口均是5年，计算 $\sigma_{GBM}$ 时用的时间窗口1年。图中“\*”表示真实的隐含波动率 $\sigma_{Real}$ ，“—”表示几何布朗运动假设下估计出来的隐含波动率 $\sigma_{GBM}$ ，“+”表示基于行为金融的扩散模型假设下估计出来的隐含波动率 $\bar{\sigma}_{BD}$ ，最后“×”表示使误差最小的隐含波动率。我们发现取5年时间窗口计算 $\sigma_{GBM}$ 误差更小。

从图8和图9,我们直观地可以看出,  $\bar{\sigma}_{BD}$  比  $\sigma_{GBM}$  的误差更小。

其中  $\bar{\text{Error}}_{BD} = \|\bar{\sigma}_{BD} - \sigma_{\text{Real}}\| = 0.0340$ ;

取5年时间窗口时,  $\text{Error}_{GBM} = \|\sigma_{GBM} - \sigma_{\text{Real}}\| = 0.0374$ ,

取1年时间窗口时,  $\text{Error}_{GBM} = \|\sigma_{GBM} - \sigma_{\text{Real}}\| = 0.0399$ 。

因此,在引入反转投资者和动量投资者两类投资群体的极限扩散模型(4a)下,且使用简易方法计算期权价格,将比直接使用GBM假设下的Black-Scholes公式计算出的结果统计上更精确。

## 六、结论和展望

金融学理论对波动率微笑现象进行解释的努力一直没有停止。传统金融学理论中,著名的CEV模型、残余波动率模型、转移扩散模型、复合期权模型(Compound Option, Geske, 1979)等,都只能解释波动率倾斜现象;跳跃扩散模型、标的资产价格与波动率不相关的随机波动率模型等,虽然能产生波动率微笑特征,但并未给出经济学意义上的理论依据,重要的是,在实证分析上都被证明没有显著地优于CEV模型。行为金融学理论中,Shefrin(2000)提出情绪(sentiment)测度的概念。他指出当情绪测度非零时,投资者对牛市和熊市判断的异质性会影响期权价值的有效性,导致期权定价的微笑效应,是值得研究的新进展。

基于股票收益的波动率微笑和相对偏差基本稳定的这两类观察,本文从宏观经济学应当考虑大数原理(李华俊, 2002; Chen, 2002, 2005)的基础出发,突破传统金融理论以GBM为代表的个体代表者模型,发展基于群体行为的生灭过程来建立期权定价的一般数学模型。具体的股价波动机制从行为金融已有的分析出发,简单考虑反转投资者和动量投资者两类投资群体,从资本市场上不同交易行为的共存来解释观察到的现象。在资产价格处于“基本价值”附近时,反转投资者在价格上涨时卖出,在价格下跌时买入,他们本质上是负反馈策略交易者;而动量投资者正好相反,在价格上涨时买入,在价格下跌时卖出,他们本质上是正反馈策略交易者。在资产价格接近“基本价值”时,两类投资群体的看法分歧不大,交易行为相对平静;一旦资产价格相对远离“基本价值”,他们看法的分歧将显著增大,交易行为就变得活跃起来,从而两边的波动率将高于中间的波动率,表现出波动率对标的资产价格的“微笑”现象,这在期权定价中间接地表现出著名的“波动率微笑”特征。这一解释机制完全不同于以往文献。

本文从生灭过程取极限得到的一般扩散过程,可以统一理解已有文献中的几何布朗运动模型、广义方差常弹性模型、残余波动率模型及利率期限结构。我们从股票指数和股指期权的实际数据证明该一般模型在拟合和预测上的优势。

有趣的是,我们的经验研究不仅证实了前人的工作,还有新的发现。为

了便于与以前的结果作比较，本文选取的期权数据区间是被研究者广泛使用的1993年数据，因此，第五部分现货指数数据选自1988年至1993年。第四部分的市场行为令人惊奇地分为两种类型：1991年到1997年的数据，通过参数估计可以证实是波动率微笑，但是1988年至1993年的数据其波动率对于标的资产价格是倾斜的（Volatility Skew），而不是微笑的。为何如此，目前还不清楚。我们猜测1987年的股市崩溃可能给市场心理造成重大影响（Jackwerth and Rubinstein, 1996），到1993年后才走出1987危机的阴影。这更显示出基于生灭过程的一般扩散过程比其他模型（如GBM模型、CEV模型和波动率残差模型）优越，因为它使我们能观察到前人未曾观察到的现象。

当然，任何新理论框架的发展都是一个从简单到复杂的过程。本文基于奥卡姆剃刀原理（Ockham's Razor）和实证经济学方法论，数学描写服从建模的简单性原则。要说明的是，首先，真实市场上的行为当然远不只以上两类投资者。其次，本文考虑的是“基本价值”附近的投资者行为，并未给出“基本价值”的均衡模型，而是从实际数据的拟合与校正中获得“基本价值”的实际值。再次，两类投资群体的描述比较简单，没有考虑两类人群之间相互作用的动态过程，忽略了股票价格变动概率的具体机制；其他的简单假设包括把主观概率简单加权作为最终上升和下降的实际概率。本文不同类型投资者所占比重为常数的假设虽然不符合现实，但该比重在真实交易过程中的直接观察或间接估计，将给监管部门提供非常重要的参考。本文研究的重点是生灭过程的群体模型与传统的几何布朗运动模型之间的差别，能否开辟描写复杂金融行为的更好框架。如能证实我们这一方向在理论和经验分析上的优越性，才需要在将来考虑更复杂的修正。我们将会继续探索这一新的数学框架。

最后要说明的是：研究生灭过程在资产定价问题上的应用系由第二作者提出，一般扩散过程的理论和经验研究由第一作者独立完成。对结果的理解与不足之处由我们共同负责。

## 附 录

首先介绍一引理：

Stone's 定理（Stone, 1963）：设  $X_t(n)$  是一生灭过程序列，初值为  $X_0(n) = X(n)$ ，瞬时均值和方差分别为  $m_n(x)$ 、 $\sigma_n^2(x)$ ，状态空间为  $E_n$ 。定义扩散过程的生成元如下：

$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + m(x)\frac{d}{dx}$ ， $0 \leq x < \infty$ ，初值为  $X_0(n) = x$ 。如果下面三个条件满足：

- (a)  $X(n) \rightarrow x$ ；
- (b) 当  $n \rightarrow \infty$  时， $E_n$  在  $[0, \infty)$  上是稠密的；
- (c) 对于  $[0, \infty)$  上每一个紧的子区间  $I$ ， $\forall x \in I \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = m(x)$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2(x) = \sigma^2(x)$

一致成立。

命题一的证明：首先条件（a）显然成立；对于条件（b），注意到  $S_t(n)$  可以取到任意

的正有理数, 所以状态空间  $E_n$  在  $[0, \infty)$  是稠密的; 最后对于条件 (c), 它的瞬时均值和方差为

$$m_n(S_t) = [(b_1^{\sim}(n) - \tilde{d}_2(n))S_t^{-\beta} + (b_2^{\sim}(n) - \tilde{d}_1(n))S_t^{\beta}] / n,$$

$$\sigma_n^2(S_t) = [(b_1^{\sim}(n) + \tilde{d}_2(n))S_t^{-\beta} + (b_2^{\sim}(n) + \tilde{d}_1(n))S_t^{\beta}] / n^2,$$

显然, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 对任意  $[0, \infty)$  上的子区间  $I$ ,  $\forall S_t \in I$ , 都有  $m_n(S_t) \rightarrow \lambda S_t^{\alpha} + \mu S_t^{-\beta}$  和  $\sigma_n^2(S_t) \rightarrow \sigma^2 S_t^{\alpha} + \delta^2 S_t^{-\beta}$  一致成立。

## 参考文献

- [1] Beekers, S., "The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing", *Journal of Finance*, 1980, 35(3), 661—673.
- [2] Black, F., and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3), 637—654.
- [3] Black, F., "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysis Journal*, 1975, 31(4), 36—41, 61—72.
- [4] Black, F., "Studies of Stock Price Volatility Changes", Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Division, 1976, 177—181.
- [5] Chen, P., "Microfoundations of Macroeconomic Fluctuations and the Laws of Probability Theory: the Principle of Large Numbers vs. Rational Expectations Arbitrage", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 2002, 49(3), 327—344.
- [6] Chen, P., "Evolutionary Economic Dynamics: Persistent Business Cycles, Disruptive Technology, and the Trade-Off between Stability and Complexity" in Dopfer, K. (ed.), *The Evolutionary Foundations of Economics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005, Chapter 15, 472—505.
- [7] 陈平,《文明分岔、经济混沌和演化经济动力学》。北京:北京大学出版社,2004年。
- [8] Christie, A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances", *Journal of Financial Economics*, 1982, 10(4), 407—432.
- [9] Cox, J., "Notes on Option Pricing: Constant Elasticity of Variance Diffusions", Working Paper, Stanford University, 1975 (reprinted in *Journal of Portfolio Management*, 1996, 22(1), 15—17).
- [10] Cox, J., and S. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process", *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(2), 145—166.
- [11] Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 1985, 53(2), 385—408.
- [12] Delong, J., A. Shleifer, L. Summers, and R. Waldmann, "Noise Trader Risk in Financial Markets", *Journal of Political Economy*, 1990a, 98(4), 703—738.

- [13] Delong, J. , A. Shleifer, L. Summers, and R. Waldmann, “Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation”, *Journal of Finance*, 1990b, 45(2), 379—395.
- [14] Fan, J. , and Q. Yao, “Efficient Estimation of Conditional Variance Function in Stochastic Regression”, *Biometrika*, 1998, 85(3), 645—660.
- [15] Fan, J. , “A Selective Overview of Nonparametric Methods in Financial Econometrics”, Working Paper, 2003.
- [16] Emanuel, D. , and J. MacBeth, “Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1982, 17(4), 533—554.
- [17] Gardiner, C. , *Handbook of Stochastic Methods*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1983, Chapter 7, 235.
- [18] Goldenberg, D. , “A Unified Method for Pricing Options on Diffusion Process”, *Journal of Financial Economics*, 1991, 29(1), 3—34.
- [19] Heston, S. , “A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”, *Review of Financial Studies*, 1993, 6(2), 327—343.
- [20] Jackwerth, J. , and M. Rubinstein, “Recovering Probability Distribution from Option Prices”, *Journal of Finance*, 1996, 51(5), 1611—1631.
- [21] Karatzas, I. , and S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [22] Kendall M. , and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory*. London: Griffin, 1963.
- [23] Kou, S. , and S. Kou, “A Diffusion Model for Growth Stocks”, *Mathematics of Operations Research*, 2004, 29(2), 191—212.
- [24] 李华俊, “哪种随机过程能更好的描述宏观涨落的微观基础? ——从相对偏差的共性去比较随机游走、扩散运动、生灭过程”, 北京大学金融数学系, 学士论文, 2002。
- [25] MacBeth, D. , and L. Merville, “Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models”, *Journal of Finance*, 1980, 35(2), 285—300.
- [26] Merton, R. , “Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous”, *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1—2), 125—144.
- [27] Rubinstein, M. , “Displaced Diffusion Option Pricing”, *Journal of Finance*, 1983, 38(1), 213—217.
- [28] Schmalense, R. , and R. Trippi, “Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia”, *Journal of Finance*, 1978, 33(1), 129—147.
- [29] Schrödinger, E. , *What is Life?* Cambridge: Cambridge University Press, 1948.
- [30] Shefrin, H. , “On Kernels and Sentiment”, Santa Clara University, Working Paper, 2000.
- [31] Stone, C. , “Limit Theorems for Random Walks, Birth and Death Processes, and Diffusion Processes”, *Illinois Journal of Mathematics*, 1963, 7, 638—660.

# Volatility Smile, Relative Deviation and Trading Strategies: A General Diffusion Model for Stock Price Movements Based on Nonlinear Birth-death Process

WEI ZENG

*(China Investment Corp.)*

PING CHEN

*(Peking University and Fudan University)*

**Abstract** Empirical observation of volatility smile in stock returns and stable relative deviations in stock indices introduce new direction in modeling option pricing. Nonlinear stochastic model of population dynamics is a better alternative for the representative agent models in stock price movements. In behavioral finance, investors can be simplified into two categories with different trading strategies; the contrarian investors and the momentum investors. The birth-death process is introduced to describe stock price fluctuations. The general diffusion process can be obtained as a limiting case, so that we have a unified framework in understanding existing models in option pricing theory, including the geometric Brownian Motion, the model of Constant Elasticity of Variance, the Residual Volatility and term structure of interest rates. Our model is capable of demonstrating volatility smile and stable relative deviation from real data. Parameter estimations and empirical tests are conducted in fitting S&P500 indices and price forecast in index option. It is a better alternative to the Black-Scholes model in option pricing.

**JEL Classification** C02, G12, C13