

数据收集、个性化定价与企业创新激励

尹振东 马 昕 寇宗来

目 录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 附录 I 模型拓展与讨论 .....          | 1  |
| 附录 II 模型拓展的数学证明 .....       | 7  |
| 附录 III 政府允许个性化定价的数学证明 ..... | 14 |
| 附录 IV 价格歧视监管政策的数学证明 .....   | 24 |
| 参考文献 .....                  | 27 |

## 附录 I 模型拓展与讨论

### 一、模型拓展

#### （一）强制统一定价的监管政策

在这部分，我们讨论政府禁止任何形式的价格歧视，要求企业对有数据区域和无数据区域制定相同价格。由于该政策实质上要求企业对所有消费者实施统一定价，因此我们将这种监管政策称为“强制统一定价”政策。如果政府完全禁止企业收集消费者数据，那么企业就无法价格歧视，等价于“强制统一定价”政策。

与分析允许三级价格歧视情形类似，我们先求解强制统一定价情形的均衡结果，再将此情形与允许个性化定价情形进行比较，进而得到相应的政策启示。分析可知，如果企业无法对有数据区域和无数据区域差别定价，那么企业就不能从有数据区域中获得更多收益，由于收集数据需要成本，企业将没有激励收集消费者数据，即均衡数据收集量 $\alpha = \beta = 0$ <sup>①</sup>。进一步可得研发均衡与定价均衡。将此情形的均衡结果与允许个性化定价的均衡结果进行比较，发现大部分结论与三级价格歧视情形（命题3）类似。只有消费者剩余的结果有轻微变化：与允许个性化定价均衡结果相比，企业统一定价后消费者剩余更低。

企业实施统一定价后，企业将产品优势转化为企业收益的能力比较弱，使得企业从创新中获得收益减少，研发激励下降，创新水平更低。统一定价缓解了企业之间的价格竞争，使企业利润增加，消费者剩余减少。与允许三级价格歧视的监管政策类似，强制企业统一定价同时降低了创新水平和数据收集总成本，对社会福利的影响不确定。当 $k$ 和 $\gamma$ 都比较小时，个性化定价时的创新水平比较高，强制企业统一定价后，创新水平下降比较明显，社会福利降低。综上所述，如果政府目标是最大化消费者剩余，那么应该允许企业个性化定价，此时允许个性化定价既提高了消费者福利又促进了企业创新；如果政府目标是最大化社会福利，那么当数据收集成本和研发创新难度都比较小时，应该允许企业个性化定价。

在前文我们分别探讨了政府如何根据不同政策目标在两种监管政策之间进行选择。我们进一步考虑如果政府具备非常强的价格歧视监管能力，那么政府就可以在“允许个性化定价”、“允许三级价格歧视”和“强制统一定价”三种监管政策之间灵活选择。在这种情况下，我们研究政府在不同政策目标下的最优价格歧视监管政策选择，得到命题5。

**命题5：**在三种价格歧视监管政策中，政府最优政策选择为：

（1）如果政府目标是最大化消费者福利，当数据收集成本比较低时，最优政策是“允许个性化定价”；否则，最优政策是“允许三级价格歧视”；

（2）如果政府目标是最大化社会福利，当数据收集成本和研发创新难度都比较小时，最优政策是“允许个性化定价”；当数据收集成本或者研发创新难度比较大时，最优政策是“强制统一定价”；其它情况下，最优政策是“允许三级价格歧视”。

为了更直观地呈现政府在不同目标下的最优价格歧视监管政策，我们进行了数值模拟（见图 I 1），分别展示了不同参数范围下消费者剩余最高和社会福利最高的监管政策。

---

<sup>①</sup> 当数据收集成本 $k \rightarrow \infty$ 时，允许个性化定价时企业数据收集量为0，等价于统一定价情形。

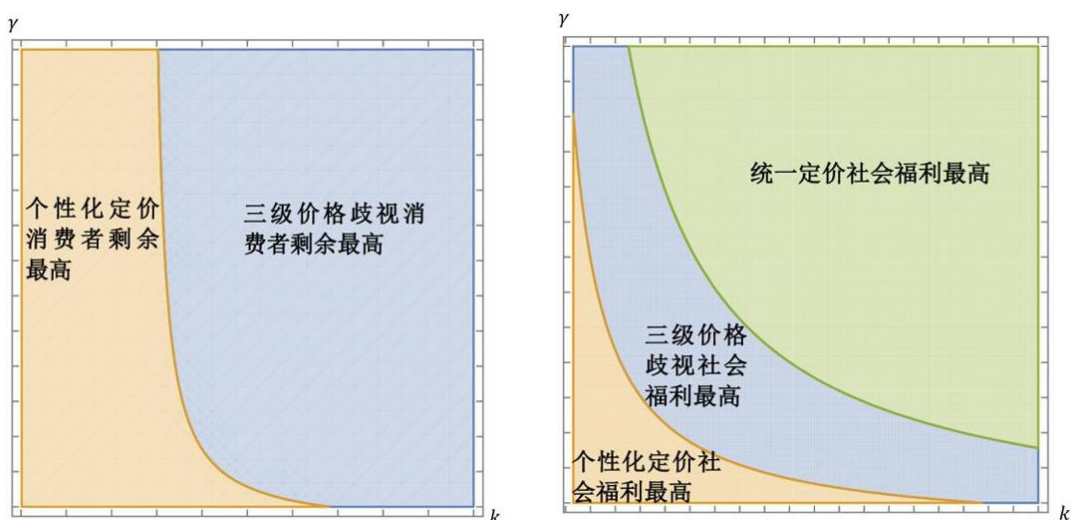


图 11 消费者剩余和社会福利目标下的最优价格歧视监管政策（参数赋值： $V_0 = 5, t = 1$ ）

综上所述，政府在确定最优价格歧视监管政策时，其目标会显著影响最终的政策选择。如果政府目标是最大化消费者福利，“强制统一定价”反而永远不会成为最优政策。如果政府目标是最大化社会福利，当数据收集成本非常高时，“强制统一定价”可能是最优的；然而，随着数字技术进步，消费者数据收集成本逐渐降低，最优政策也会随之变化，从“强制统一定价”逐渐转向“允许三级价格歧视”，最终到“允许个性化定价”。

## （二）只有一个企业创新

文献中主要有两种模型化创新的方式。一种是在基础模型中设定的研发竞争形式：两个企业同时进行创新决策；另外一种是企业只能由一个企业进行（Arrow, 1962; Aghion et al., 2005）。这样分类的方式主要取决于创新想法的稀缺性（Belleflamme & Peitz, 2015）：当创新想法相对稀缺时，创新一般由个别企业率先提出并实施，所以设定由一个企业进行创新；反之，当创新想法不稀缺，则由多个企业进行创新竞赛<sup>①</sup>。在本节，我们将考察只有一个企业进行创新时，企业定价、数据收集以及研发创新的均衡结果，并明确价格监管政策。

由于在研发创新之前，企业 A 和 B 是对称的，因此我们以企业 A 进行创新为例说明具体设定。给定企业 B 不能进行创新，企业 A 选择创新水平  $e_A$ ，等价于选择产品优势  $\Delta$ 。因此，为方便表述，当只有一个企业进行创新时，我们将产品优势  $\Delta$  认为是企业选择的创新水平。企业 A 选择创新水平  $\Delta$ ，将消费者效用提高  $\Delta$ ，付出研发投入（成本） $\frac{1}{2}\gamma\Delta^2$ ，其中  $\gamma$  表示创新难度， $\gamma$  越大，创新难度越大。

实际上，从研发边际收益的角度来看，研发决策在单个企业创新和两个企业创新设定下是类似的：都是给定竞争对手的创新水平，企业选择自己最优的创新水平。以企业 A 为例详细说明：当两个企业同时创新时，是给定企业 B 创新水平为  $e_B$ ，企业 A 选择创新水平  $e_A$ ，使  $\Delta = e_A - e_B$ ；当只有企业 A 创新时，给定  $e_B = 0$ ，企业 A 选择创新水平  $e_A$ ，使  $\Delta = e_A - 0$ 。由此可见，企业 A 本质上都是选择产品优势  $\Delta$ 。区别在于，两个企业创新时，给定竞争对手创新水平比较高，企业提高自己的创新水平获得产品优势，需要付出很高成本，因此提高幅度比较小，均衡时  $\Delta$  比较小。而只有一个企业创新时，给定竞争对手创新水平比较低，企业更有激励提高自己的创新水平，均衡时  $\Delta$  比较大。

接下来，我们对只有一个企业创新的均衡结果进行关于数据收集成本（ $k$ ）和创新难度（ $\gamma$ ）的比较静态分析，发现大部分结论与基础模型一致。只有  $k$  和  $\gamma$  对创新企业利润的影响发生轻微变化：

<sup>①</sup> 对创新的两种模型化方式可以参考产业经济学权威教科书《Industrial Organization: Markets and Strategies》（2nd edition）（Belleflamme & Peitz, 2015）中的第 18 章。

$k$ 或者 $\gamma$ 减少, 创新企业利润可能会增加。产生变化的原因如下: 当创新难度 $\gamma$ 比较小时, 创新企业会选择比较大的创新水平 $\Delta$ , 从而获得比较明显的产品优势。此时,  $k$ 减少, 创新企业增加数据收集量比较多, 从而获得更多消费者剩余, 使企业利润增加;  $\gamma$ 减少, 创新水平更高, 创新企业产品优势越大, 利润越高。

最后, 当只有一个企业研发创新时, 重新研究政府的价格歧视监管政策, 结论与基础模型一致。这表明论文模型结论稳健。

### (三) 产品定制

随着数字技术的发展, 企业不仅可以实现个性化定价, 还能依据消费者偏好生产更符合其个性化需求的产品, 即进行产品定制。我们遵循文献中常用方法来模型化产品定制: 通过完全匹配消费者偏好, 从而消除消费者购物的交通成本 (Chen et al., 2022; Laussel & Resende, 2022)。通过引入企业利用消费者数据进行产品定制, 我们可以研究如果消费者数据可以直接改进产品, 是否会影响均衡结果。

我们以消费者购买企业 A 产品为例, 具体说明企业产品定制时的消费者效用。企业 A 收集了  $[0, \alpha]$  范围内消费者数据, 对这部分消费者同时进行个性化定价和产品定制, 因此这部分消费者去 A 购买获得效用为:  $V_A - p_A(x)$ ; 企业 A 没有收集  $[\alpha, 1]$  部分的消费者数据, 因此这部分消费者无法享受企业 A 产品定制的好处, 去 A 购买获得效用为:  $V_A - tx - p_A$ 。

与基础模型类似, 企业进行产品定制时, 数据收集存在唯一纯策略均衡: 企业会收集数据使每个企业的统一定价都高于边际成本, 此时每个企业都可以通过统一定价获得一部分消费者。我们对产品定制均衡结果进行关于数据收集成本 ( $k$ ) 和研发创新难度 ( $\gamma$ ) 的比较静态分析, 发现结论与基础模型完全一致。

接着, 我们将产品定制均衡结果与企业只能个性化定价均衡结果进行比较, 从而可以明确产品定制对创新水平和各方福利的具体影响。通过这种比较分析, 我们可以深入理解产品定制如何在促进企业创新、提升消费者剩余以及改善社会总体福利方面发挥作用, 进而得到相应的价格歧视监管政策。

与只能个性化定价相比, 企业进行产品定制后: 数据收集量更多; 创新水平更高; 企业利润更低; 消费者剩余更高; 当  $k$  比较小时, 社会福利更高, 反之则更低。具体原因如下。

企业进行产品定制消除了交通成本, 进而提高了收集消费者数据的收益, 企业会收集更多数据。产品定制使企业更有效地将产品优势转化为数据优势, 提高了创新产品的收益, 进而提高了企业创新水平。产品定制后, 数据收集量增加, 加剧了价格竞争, 企业利润更低, 消费者剩余更高。产品定制消除了交通成本, 提高了社会福利, 但是也增加了数据收集总成本, 加总起来对社会福利的影响则不确定。当  $k$  比较小时, 数据收集量较大, 产品定制收益较多, 因此社会福利更高; 当  $k$  比较大时, 数据收集量较小, 产品定制收益较少, 社会福利更低。

回顾基础模型的命题 2 (1):  $k$  降低, 创新水平提高, 企业利润减少, 消费者剩余增加, 社会福利先减少后增加。我们发现产品定制的结果与数据收集成本降低的结果类似。因为  $k$  降低减少了数据收集成本, 而产品定制提高了数据收集的收益, 等价于降低收集成本。由此可见, 即使考虑消费者数据可以直接用于改进产品, 论文结论依然稳健。

总之, 产品定制提高了创新水平, 有利于消费者, 不利于企业, 在数据收集成本比较低时, 可以提高社会福利。因此, 随着数字技术发展, 数据收集成本逐渐降低, 企业可以进行产品定制后, 政府应该更倾向于允许企业进行个性化定价。

### (四) 数据收集具有规模效应<sup>①</sup>

在基础模型中, 我们假设数据收集成本是凸函数, 这意味着企业获得消费者数据的边际成本递

<sup>①</sup> 感谢审稿专家建议我们研究这一情形。

增。然而，现实中数据收集和处理在一定数据量范围内可能具有规模效应，比如随着数据收集规模扩大，企业购买设备、开发算法等投入可被更多数据量分摊，从而表现出数据收集平均成本和边际成本递减的特征。为了更好体现数据收集结果的稳健性，在本节我们研究数据收集和处理的规模效应，即考虑数据收集成本函数为凹函数的情形。

为了体现数据收集规模效应，我们假设数据收集成本为 $C(\alpha) = \alpha - \varphi\alpha^2$ ，其中 $\varphi > 0$ 是数据收集的成本系数。在这一凹函数的设定下，数据收集的边际成本和平均成本都随着数据收集量递减，体现了数据收集的规模效应。随着数字技术进步，数据收集和处理成本下降，在模型中体现为 $\varphi$ 增加。 $\varphi$ 越大，数据收集的边际成本减少，数据收集规模效应越大。为了保证数据收集量增加时数据收集总成本上升，即数据收集边际成本为正，我们假设 $0 < \varphi < 1/2$ 。

引入数据收集规模效应，可能会改变企业利润函数的凹凸性。以企业 A 为例，在数据收集阶段，企业 A 利润函数 $\pi(\alpha)$ 由收入函数 $R(\alpha)$ 减去数据收集成本函数 $C(\alpha)$ 。由于收入函数 $R(\alpha)$ 为凹函数（ $R''(\alpha) < 0$ ），成本函数 $C(\alpha)$ 也为凹函数（ $C''(\alpha) < 0$ ），因此企业利润函数的凹凸性取决于两者的相对大小。当数据收集规模效应 $\varphi$ 比较大时，企业利润函数是非凹的，可能会出现两个企业都不收集数据的角点解均衡；为了使研究问题更加有意义并且可以与基础模型进行比较，我们重点研究企业利润为凹函数情形，即规模效应 $\varphi$ 比较小。

在这一范围内，我们发现，数据收集博弈存在两个均衡结果，一个是对称均衡：每个企业都收集一部分消费者数据，企业收集数据区域不会出现重叠，并且每个企业都获得一部分统一定价区域消费者。对称均衡与基础模型的数据收集均衡结果类似。另一个是非对称均衡：当产品优势 $\Delta$ 比较大时，产品优势企业收集数据，而产品劣势企业不收集数据。但考虑到研发创新阶段，企业需要付出较多研发成本后才能获得较大的产品优势，数据收集的非对称均衡不成立。因此，即使考虑数据收集成本为凹函数，数据收集均衡的性质也与基础模型保持一致。

进一步，我们检验基础模型的主要结论是否成立，发现大部分结论与基础模型一致。只有社会福利的结果发生了轻微变化：当 $t$ 比较大时，随着数据技术进步， $\varphi$ 增加，社会福利增加；当 $t$ 比较小时， $\varphi$ 增加，社会福利变化与 $\varphi$ 和 $\gamma$ 大小有关，呈现出非单调关系。因为 $t$ 比较大时，企业从个性化定价中获得收益较多，数据收集量较大，所以 $\varphi$ 增加使数据收集总成本减少较多，社会福利增加。综上所述，即使考虑数据收集的规模效应，论文结论依然是稳健的。<sup>①</sup>

### （五）企业先收集数据再研发创新

在基础模型的博弈时序中，考虑到企业调整数据收集策略更加灵活，我们假设企业先研发创新再收集数据。现实中，一些企业可能会采取不同的顺序，即先收集消费者数据，再进行研发创新。在本节，我们考虑这种博弈顺序的均衡结果和价格监管政策。

我们对第一期和第二期博弈顺序进行调整：第 1 期，企业同时收集消费者数据；第 2 期，企业同时研发创新提高产品质量。其它设定与基础模型保持一致。在求解此博弈时序下的数据收集均衡、研发均衡和定价均衡后，我们进行了数据收集成本（ $k$ ）和研发创新难度（ $\gamma$ ）的比较静态分析。

研究发现，与基础模型相比，大部分结论都没有发生变化，只有创新水平的结果发生了变化，此时 $k$ 变化不改变创新水平。当企业先收集数据再研发创新时，数据优势可以转化为产品优势。因为个性化定价可以使产品优势更好地转化为企业收益，所以收集更多消费者数据的企业，更有激励进行研发创新。但是，当数据收集成本降低时，竞争性企业同时增加相同的数据收集量，企业通过增加数据收集量产生的竞争优势将相互抵消，最终使得单个企业并没有获得额外的数据优势，因此企业研发激励不会提高，创新水平不变。

进一步重新考察价格歧视监管政策，我们发现，大部分政策建议与基础模型保持一致，只有关

<sup>①</sup> 我们也考虑了线性收集成本的设定，此时数据收集的边际成本为常数。研究发现，当边际成本不是很大时，模型结论与正文中二次项成本类似；当边际成本很大时，会出现企业不收集数据的角点解均衡，这种均衡不太有趣，而且可能与现实不太一致。因此，为聚焦更有趣和现实的均衡，我们采用二次项数据收集成本。

于社会福利的政策建议出现了一些细微调整。如果政府目标是最大化社会福利，应该总是禁止企业个性化定价。原因在于，允许个性化定价并不能带来创新收益的提高，但是会增加数据收集总成本，使社会福利降低，所以应该禁止个性化定价。

## （六）创新产品的生产成本上升

在基础模型中，创新前后的产品生产成本保持不变。现实中，企业创新后，产品技术水平提高，产品的生产成本可能会随之增加，因此我们考虑企业创新导致产品生产成本上升的情形。

假设企业选择创新水平 $e_i$ ，产品生产成本提高到 $\theta e_i$ ，其中 $\theta > 0$ ， $\theta$ 表示创新水平提高所导致的产品生产成本提高的幅度， $\theta$ 越大表示研发创新后的产品生产成本越高。其它设定与基础模型保持一致。

我们从数学上可以严格证明，使用三个变量代换可以将产品生产成本提高的设定转变为基础模型的形式。具体来说：首先，对定价阶段的统一定价进行变量代换，用变量 $P_i$ 代换 $p_i - \theta e_i$ ；其次，对研发阶段的创新水平进行变量代换，用变量 $E_i$ 代换 $(1 - \theta)e_i$ ；最后，对参数进行变量代换，用 $\tilde{\gamma}$ 代换 $\frac{\gamma}{(1-\theta)^2}$ 。通过以上变量代换，我们可以得到与基础模型一致的均衡结果，只是参数临界值大小发生了变化，因此，比较静态的结果以及价格监管政策的结论都不会发生变化。

## 二、关于模型核心假设的讨论<sup>①</sup>

### （一）产品市场、数据收集与企业创新相互促进关系的长期影响

在第三部分我们论述了产品市场、数据收集与企业创新之间的促进关系，然而，在本文模型中，由于两家企业初始条件完全相同，因此均衡时，两家企业会选择相同的创新水平和数据收集量，即没有企业拥有产品优势或者数据优势。

在这部分，我们讨论在两个企业长期重复博弈中，如果一个企业外生获得了初始产品优势，该初始产品优势会在产品、数据 and 创新的相互促进作用下被不断放大，从而推动产品市场向垄断倾斜。为了说明这一机制，我们以企业 A 获得初始产品优势 $\Delta_V$ 为例展开分析。由于产品优势会转化为数据优势，企业 A 收集更多数据；产品优势对数据收集的促进作用会增强企业 A 的研发激励，使得企业 A 创新水平超过企业 B，即 $\Delta_e = e_A - e_B > 0$ 。一期博弈结束后，企业 A 产品优势从 $\Delta_V$ 提高到 $\Delta_V + \Delta_e$ 。在此产品优势基础上，企业开始新一轮的数据收集与研发创新博弈，博弈结束后企业 A 产品优势进一步提高。当 A 产品优势大到一定程度后，最偏好 B 产品的消费者（位于 Hotelling 线段 $x = 1$ 处的消费者）也会购买 A 产品，此时企业 B 就会被挤出市场，产品市场被企业 A 垄断。

### （二）需求具有弹性对模型机制的影响

在第三部分，我们是在需求无弹性设定下进行分析。现实中，市场需求可能具有弹性，我们发现引入需求弹性会增强企业收集数据和创新激励，主要作用机制如下。

首先，需求弹性直接提高了研发的边际收益。在需求有弹性时，研发水平提高不仅能增强产品优势，还能使需求扩张更多、价格上升，直接增强企业创新激励。其次，需求弹性增强了剩余榨取效应，提高企业收集数据激励。由于个性化定价更灵活，可以更好地吸引支付意愿较低的消费者购买，这使得引入需求弹性后，剩余榨取效应增强，提高了数据收集的边际收益，使数据收集量增加。最后，需求弹性通过直接影响和间接影响共同增强创新激励。直接影响是在给定数据收集量时，需求弹性使创新能够提高需求量和价格，直接提高了创新激励；间接影响是需求弹性提高了数据收集量，进而促进创新。由此可见，引入需求弹性强化了产品市场、数据收集和企业创新相互促进的作

<sup>①</sup> 感谢审稿专家建议我们讨论这一部分。

用机制。

### （三）消费者隐藏数据对模型机制的影响

在第三部分，我们假设企业支付成本即可获取消费者数据，现实中，消费者可能通过付出成本不让企业收集其个人数据，比如删除追踪软件或清除浏览记录，我们将这种行为称为消费者隐藏数据。在本部分，我们将讨论消费者隐藏数据行为对企业数据收集激励和创新激励的影响。

由于忠诚消费者面临更高的个性化定价，因此更有激励付出成本隐藏数据，转而支付较低的统一定价。对于隐藏数据消费者，由于其价格从个性化定价转变为统一定价，企业损失了一部分收入。消费者隐藏数据会对数据收集边际收益产生两个新的影响。第一，对于隐藏数据消费者，随着数据收集量增加，统一定价降低，隐藏数据消费者支付价格下降，企业收入损失增加，从而降低了数据收集的边际收益；第二，对于未隐藏数据消费者，随着数据量增加，统一定价变得更低，使得更多消费者转而隐藏数据，导致企业收入减少，数据收集边际收益进一步降低。综上，消费者隐藏数据会使数据收集激励降低。隐藏数据对企业创新的影响分为直接影响和间接影响。直接影响是在给定数据收集量时，由于企业不能对忠诚消费者进行个性化定价，产品优势转化为企业收益的能力减弱了，研发激励降低；间接影响是隐藏数据会降低企业收集数据激励，进而降低企业研发激励。由此可见，引入消费者隐藏数据弱化了产品市场、数据收集和企业创新相互促进的作用机制。

### （四）数据权利归属于消费者对模型机制的影响

随着个人信息保护法律法规的不断完善，数据权利归属于消费者的讨论日益增多。如果消费者拥有数据权利，那么企业在收集数据之前需要获得消费者的同意，只有在消费者允许的情况下，企业才能付出数据收集与处理成本获取数据。在本部分，我们讨论消费者决定是否允许企业收集数据如何影响企业的数据收集激励和创新激励。<sup>①</sup>

由于忠诚消费者面临更高的个性化价格，因此倾向于拒绝数据收集；而偏好程度较弱的消费者则倾向于允许企业收集数据，以获得更低价格。由此可见，企业能够收集的数据主要来自对其偏好较弱、对竞争对手偏好较强的消费者。在这一情形下，企业实施个性化定价的主要作用不再是对忠诚消费者进行剩余榨取，而是用于争夺原本偏好竞争对手的消费者。此时企业通过个性化定价能够榨取的消费者剩余较少，企业收集数据激励降低。进一步地，由于企业无法对忠诚消费者实施个性化定价，其产品优势转化为企业收益的能力减弱，从而降低了企业创新激励。由此可见，消费者决定是否允许企业收集数据弱化了产品市场、数据收集和企业创新相互促进的作用机制。

---

<sup>①</sup> 如果消费者选择向企业披露数据，企业可直接基于所披露数据实施个性化定价，而无需付出成本收集和处理数据。该情形已有文献研究（Ali et al., 2023），且由于不涉及企业内生选择数据收集范围问题，与本文研究重点存在较大差异。相关研究已在文献综述部分予以介绍，故不在此进行详细讨论。

## 附录 II 模型拓展的数学证明

### (一) 强制统一定价的监管政策

证明思路如下：首先我们需要求解企业统一定价的均衡结果，然后与允许个性化定价均衡结果进行比较，最后我们需要比较三种价格歧视监管方式并得到最优的政策选择，即命题 5。

强制统一定价情形与允许个性化定价情形求解方法类似。企业 A 对所有消费者制定统一价格  $p_A^U$ ①，企业 B 对所有消费者制定统一定价  $p_B^U$ 。消费者去 A 购物获得效用为： $V_A - p_A^U - tx$ ；去 B 购物获得效用为： $V_B - p_B^U - t(1-x)$ 。存在边际消费者  $z \in [0,1]$ ，对于以统一定价  $p_A^U$  购买 A 的产品和以统一定价  $p_B^U$  购买 B 的产品无差异：

$$V_A - p_A^U - tz = V_B - p_B^U - t(1-z) \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{p_B^U - p_A^U + \Delta}{2t}.$$

根据  $z$  的表达式，得到企业总收入： $R_A = p_A^U z$  和  $R_B = p_B^U (1-z)$ 。每个企业选择  $p_A^U$  和  $p_B^U$  最大化总收入，得到均衡统一定价： $p_A^U = t + \frac{\Delta}{3}$ ， $p_B^U = t - \frac{\Delta}{3}$ 。代入到企业收入表达式中可得： $R_A = \frac{(3t+\Delta)^2}{18t}$  和  $R_B = \frac{(3t-\Delta)^2}{18t}$ 。将企业总收入减去研发投入成本可得： $\Pi_A = R_A - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 = \frac{(3t+\Delta)^2}{18t} - \frac{1}{2}\gamma e_A^2$ ； $\Pi_B = R_B - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = \frac{(3t-\Delta)^2}{18t} - \frac{1}{2}\gamma e_B^2$ 。对  $\Pi_A$  求  $e_A$  的一阶导数可得： $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = \frac{1}{3} + \frac{e_A - e_B}{9t} - \gamma e_A$ ；对  $\Pi_B$  求  $e_B$  的一阶导数可得： $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = \frac{1}{3} + \frac{-e_A + e_B}{9t} - \gamma e_B$ 。在  $\gamma > \frac{1}{t}$  条件下， $\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial e_A^2} < 0$ ， $\frac{\partial^2 \Pi_B}{\partial e_B^2} < 0$ 。联立方程组  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = 0$  和  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = 0$  可得均衡创新水平： $e_A = \frac{1}{3\gamma}$ ， $e_B = \frac{1}{3\gamma}$ 。均衡  $\Delta = e_A - e_B = 0$ 。将均衡创新水平代入价格、企业利润、消费者剩余和社会福利表达式可得：

$$\text{企业统一定价： } p_A^U = p_B^U = t;$$

$$\text{企业利润： } \Pi_A = \Pi_B = \frac{9t\gamma - 1}{18\gamma};$$

$$\text{消费者剩余： } CS = \int_0^z (V_A - tx - p_A^U) dx + \int_z^1 (V_B - t(1-x) - p_B^U) dx = V_0 + \frac{1}{3\gamma} - \frac{5t}{4};$$

$$\text{社会福利： } W = \int_0^z (V_A - tx) dx + \int_z^1 (V_B - t(1-x)) dx - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = V_0 + \frac{2}{9\gamma} - \frac{t}{4}.$$

接下来，我们将强制统一定价均衡结果与允许个性化定价均衡结果比较可得：

$$(1) \text{ 创新水平： } e^U < e^P;$$

$$(2) \text{ 企业利润： } \Pi^U < \Pi^P;$$

$$(3) \text{ 消费者剩余： } CS^U < CS^P;$$

(4) 社会福利：在  $k > \hat{k}$ 、 $\gamma > \frac{1}{t}$  参数范围内，存在唯一临界值  $\gamma'_W$  和  $k''_W$ ，当  $\frac{1}{t} < \gamma < \gamma'_W$  且  $\hat{k} < k < k''_W$  时， $W^U < W^P$ ；反之， $W^U > W^P$ 。

可以发现，与允许三级价格歧视和允许个性化定价比较结果相比，消费者剩余结论发现变化；其余结论一致。

最后，我们比较三种价格歧视监管方式并得到最优的政策选择，即命题 5。

$$(1) \text{ 消费者剩余：当 } \hat{k} < k < k_{CS} \text{ 时， } CS^U < CS^{NP} < CS^P; \text{ 当 } k > k_{CS}, CS^U < CS^P < CS^{NP};$$

① 上标 U (Uniform) 表示对所有消费者统一定价。

(2) 社会福利：当  $\frac{1}{t} < \gamma < \bar{\gamma}_p$  且  $\hat{k} < k < k''_W$  时， $W^p > \max\{W^{NP}, W^U\}$ ，其中  $\bar{\gamma}_p$  和  $k''_W$  是唯一临界值；当  $\frac{1}{t} < \gamma < \bar{\gamma}_u$  且  $k > \bar{k}_u$ ，或者  $\gamma > \bar{\gamma}_u$ ， $k > \hat{k}$  时， $W^u > \max\{W^{NP}, W^p\}$ ，其中  $\bar{\gamma}_u$  和  $\bar{k}_u$  是唯一临界值；其它情形， $W^{NP} > \max\{W^u, W^p\}$ 。

## (二) 只有一个企业创新

证明思路如下：首先我们需要求解只有一个企业创新的均衡结果；其次，我们需要验证基础模型中比较静态和价格歧视监管政策的结论是否成立。

### 1. 求解均衡结果

由于创新是第 1 期进行的，因此当只有一个企业创新时，定价均衡和数据收集均衡与基础模型完全相同。现在，我们只需要内生  $\Delta$ 。假设企业 A 是创新企业，令  $\Pi_A$  关于  $\Delta$  的一阶导数  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial \Delta} = 0$  得到  $\Delta = \frac{t(9k+10t)(9k+14t)}{3t(9k+10t)^2\gamma - 3(k+2t)(9k+14t)}$ 。确保  $\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial \Delta^2} < 0$  和  $0 < \Delta < t$ <sup>①</sup> 需要满足： $\gamma > \frac{4(3k+4t)(9k+14t)}{3t(9k+10t)^2}$ 。将研发均衡代入数据收集均衡、企业定价和各方福利表达式可得：

$$\text{数据收集量为：} \alpha = \frac{2t^2(9k+10t)^2\gamma}{3(k+2t)(-((k+2t)(9k+14t))+t(9k+10t)^2\gamma)}, \beta = \frac{2t(-2(k+2t)(9k+14t)+t(9k+10t)^2\gamma)}{3(k+2t)(-((k+2t)(9k+14t))+t(9k+10t)^2\gamma)};$$

$$\text{企业统一定价：} p_A = \frac{t^2(3k+2t)(9k+10t)^2\gamma}{3(k+2t)(t(9k+10t)^2\gamma - (k+2t)(9k+14t))}, p_B = \frac{t(3k+2t)(t(9k+10t)^2\gamma - 2(k+2t)(9k+14t))}{3(k+2t)(t(9k+10t)^2\gamma - (k+2t)(9k+14t))};$$

$$\text{企业个性化定价：} p_A(x) = \frac{t(3k+2t)(t(9k+10t)^2\gamma - 2(k+2t)(9k+14t))}{3(k+2t)(t(9k+10t)^2\gamma - (k+2t)(9k+14t))} + t(1-2x),$$

$$p_B(x) = \frac{t^2(3k+2t)(9k+10t)^2\gamma}{3(k+2t)(t(9k+10t)^2\gamma - (k+2t)(9k+14t))} + t(2x-1);$$

$$\text{企业利润为：} \Pi_A = \frac{t^2(9k+10t)^2(9k+14t)\gamma}{18(k+2t)(-((k+2t)(9k+14t))+t(9k+10t)^2\gamma)}, \Pi_B = \frac{t(9k+14t)(-2(k+2t)(9k+14t)+t(9k+10t)^2\gamma)^2}{18(k+2t)(9k^2+32kt+28t^2-t(9k+10t)^2\gamma)^2};$$

消费者剩余为：

$$CS = \int_0^\alpha (V_A - tx - p_A(x)) dx + \int_\alpha^z (V_A - tx - p_A) dx + \int_z^{1-\beta} (V_B - t(1-x) - p_B) dx + \int_{1-\beta}^1 (V_B - t(1-x) - p_B(x)) dx$$

$$= V_0 - \frac{5t}{4} + \frac{8t^3}{9(k+2t)^2} + \frac{t(9k+14t)^2(9k^2-12kt-28t^2)}{36(9k^2+32kt+28t^2-t(9k+10t)^2\gamma)^2} + \frac{t(9k+10t)(9k+14t)}{-6(k+2t)(9k+14t)+6t(9k+10t)^2\gamma};$$

社会福利为：

$$W = \int_0^z (V_A - tx) dx + \int_z^1 (V_B - t(1-x)) dx - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma\Delta^2$$

$$= V_0 + \frac{1}{36} \left( -\frac{t(9k^2+52kt+36t^2)}{(k+2t)^2} + \frac{t(9k+14t)^2(27k^2+52kt+28t^2)}{(9k^2+32kt+28t^2-t(9k+10t)^2\gamma)^2} + \frac{4t(9k+8t)(9k+14t)}{-9k^2-32kt-28t^2+t(9k+10t)^2\gamma} \right)。$$

### 2. 验证结论是否成立

首先，我们对只有一个企业创新的均衡结果进行  $k$  的比较静态分析，发现当  $\frac{4(3k+4t)(9k+14t)}{3t(9k+10t)^2} < \gamma <$

$\frac{4(k+2t)(9k+14t)^2}{t(9k+10t)^3}$  时， $\frac{\partial \Pi_A}{\partial k} < 0$ ，反之  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial k} > 0$ 。其余结果与基础模型一致。

其次，我们进行  $\gamma$  的比较静态分析，发现  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial \gamma} < 0$ 。其余结果与基础模型一致。

<sup>①</sup>  $0 < \Delta < t$  确保了产品优势企业不会将产品劣势企业挤出市场。

最后，我们验证了价格歧视监管政策，发现结论与基础模型一致。

### (三) 产品定制

证明思路如下：首先我们需要求解加入产品定制后的均衡结果；其次，我们需要验证基础模型中比较静态和价格歧视监管政策的结论是否成立；最后，我们将产品定制均衡结果与基础模型均衡结果进行比较。

#### 1. 求解均衡结果

加入产品定制后，被收集数据的消费者购买产品效用发生变化， $[0, \alpha]$ 范围内消费者去 A 购物获得效用为： $V_A - p_A(x)$ ； $[1 - \beta, 1]$ 范围内消费者去 B 购物获得效用为： $V_B - p_B(x)$ ；未收集数据消费者购买产品效用保持不变。

首先，给定企业统一定价 $p_A$ 和 $p_B$ ，我们确定企业个性化定价。对于 $[0, \alpha]$ 范围内消费者，去 A 购买获得效用： $V_A - p_A(x)$ ；去 B 购买获得效用： $V_B - p_B - t(1 - x)$ 。A 制定个性化定价 $p_A(x)$ 使 $[0, \alpha]$ 范围内消费者对于以个性化定价购买 A 产品和以统一定价购买 B 产品无差异。因此，消费者效用满足：

$$V_A - p_A(x) = V_B - p_B - t(1 - x) \Rightarrow p_A(x) = V_A - V_B + p_B + t(1 - x)。$$

同理，B 制定个性化定价 $p_B(x)$ 使 $[1 - \beta, 1]$ 范围内消费者对于以统一定价购买 A 产品和以个性化定价购买 B 产品无差异，消费者效用满足：

$$V_A - p_A - tx = V_B - p_B(x) \Rightarrow p_B(x) = V_B - V_A + p_A + tx。$$

接下来，求解均衡统一定价。与基础模型类似，当定价均衡为每个企业都在统一定价区域获得部分消费者时，得到均衡统一定价：

$$p_A = \frac{1}{3}(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta)，p_B = \frac{1}{3}(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta)。$$

我们要求出这个均衡成立条件，求解过程与基础模型类似，不再重复赘述。通过证明可得：当 $k > \frac{1}{6}(3 + \sqrt{33})t$ 时，数据收集博弈存在唯一纯策略均衡，企业会收集数据使每个企业都在统一定

价区域获得部分消费者，企业的统一定价都高于边际成本。均衡时企业收入为： $R_A = \frac{(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta)^2}{18t} +$

$$\frac{1}{6}\alpha(t(12 - 7\alpha - 8\beta) + 4\Delta)；R_B = \frac{(t(3 - 4\beta - 2\alpha) - \Delta)^2}{18t} + \frac{1}{6}\beta(t(12 - 7\beta - 8\alpha) - 4\Delta)。$$

减去数据收集成本后得到企业利润 $\pi_A$ 和 $\pi_B$ ，联立 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha} = 0$ 和 $\frac{\partial \pi_B}{\partial \beta} = 0$ 可得均衡数据收集量： $\alpha =$

$$\frac{2t}{3(t+k)} + \frac{2\Delta}{t+9k}，\beta = \frac{2t}{3(t+k)} - \frac{2\Delta}{t+9k}。在 $k > \frac{1}{6}(3 + \sqrt{33})t$ 条件下，满足 $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial \alpha^2} < 0$ 和 $\frac{\partial^2 \pi_B}{\partial \beta^2} < 0$ 。$$

进一步减去研发投入成本可得 $\Pi_A$ 和 $\Pi_B$ ，联立 $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = 0$ 和 $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = 0$ 可得均衡创新水平： $e_A = \frac{9k+5t}{3\gamma(9k+t)}$ ， $e_B = \frac{9k+5t}{3\gamma(9k+t)}$ 。将研发均衡代入数据收集均衡、企业定价和各方福利表达式可得：

$$\text{数据收集量为：}\alpha = \beta = \frac{2t}{3(t+k)}；$$

$$\text{企业统一定价：}p_A = p_B = \frac{t(3k-t)}{3(t+k)}；$$

$$\text{企业个性化定价：}p_A(x) = \frac{t(3k-t)}{3(t+k)} + t(1-x)，p_B(x) = \frac{t(3k-t)}{3(t+k)} + tx；$$

$$\text{企业利润为：}\Pi_A = \Pi_B = \frac{1}{18}\left(t\left(5 + \frac{4k}{k+t}\right) - \frac{(9k+5t)^2}{(9k+t)^2\gamma}\right)；$$

消费者剩余为：

$$CS = \int_0^\alpha (V_A - p_A(x)) dx + \int_\alpha^z (V_A - tx - p_A) dx + \int_z^{1-\beta} (V_B - t(1-x) - p_B) dx + \int_{1-\beta}^1 (V_B - p_B(x)) dx = V_0 + \frac{8t^3}{9(k+t)^2} + \frac{1}{3\gamma} + t\left(\frac{4}{27k\gamma+3t\gamma} - \frac{5}{4}\right);$$

社会福利为：

$$W = \int_0^\alpha (V_A) dx + \int_\alpha^z (V_A - tx) dx + \int_z^{1-\beta} (V_B - t(1-x)) dx + \int_{1-\beta}^1 (V_B) dx - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = V_0 + \frac{t(-9k^2-34kt+7t^2)}{36(k+t)^2} - \frac{2(-9k+t)(9k+5t)}{9(9k+t)^2\gamma}。$$

2. 验证结论是否成立

与基础模型类似，我们分别进行了 $\Delta$ 、 $k$ 和 $\gamma$ 的比较静态分析。发现结果与基础模型一致。

3. 比较产品定制均衡结果与基础模型均衡结果

为了简化表达，我们将产品定制情形上标记为 C (Customization)。将只有个性化定价均衡结果与加入产品定制均衡结果进行比较可得：

① 数据收集量： $\alpha^C > \alpha^P$ ， $\beta^C > \beta^P$ ；创新水平： $e^C > e^P$ ；

② 企业利润： $\Pi^C < \Pi^P$ ；

③ 消费者剩余： $CS^C > CS^P$ ；

④ 社会福利：在 $k > \frac{1}{6}(3 + \sqrt{33})t$ 、 $\gamma > \frac{1}{t}$ 参数范围内，存在唯一临界值 $k_C$ ，当 $\frac{1}{6}(3 + \sqrt{33})t < k < k_C$ 时， $W^C > W^P$ ；反之， $W^C < W^P$ 。

#### (四) 数据收集具有规模效应

证明思路如下：由于数据收集成本函数变化，不会影响企业收入函数，因此，首先利用引理 1 中得到的企业收入函数，找到数据收集成本为凹函数情形下， $\alpha$ 和 $\beta$ 的最优反应函数；其次，联立 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最优反应函数并求解其交点，确定数据收集均衡结果和均衡成立范围；最后，求解研发创新均衡，并检验基础模型中的结论是否稳健。

1. 求解均衡结果

$\alpha$ 和 $\beta$ 的最优反应函数求解思路与引理 1 类似，不再赘述。在 $0 < \Delta < t$ 范围内，根据数据收集反应函数交点可知，当 $t < \frac{2}{3}$ 时，会出现两个企业都不收集数据的情形，即 $\alpha = 0$ ， $\beta = 0$ 。因为我们考虑的是数据收集对企业创新和各方福利的影响，并且为了与基础模型进行对比，我们重点分析企业收集数据的均衡结果，即在 $t > \frac{2}{3}$ 范围内考虑数据收集均衡。求解可得，有两个数据收集均衡结果：

一个是对称均衡（内点解均衡）， $\alpha = \frac{2t-3}{6(t-\varphi)} + \frac{\Delta}{5t-9\varphi}$ ， $\beta = \frac{2t-3}{6(t-\varphi)} - \frac{\Delta}{5t-9\varphi}$ ；另一个是非对称均衡（角点解均衡）：

$\alpha = \frac{2(3t+\Delta)-9}{2(7t-9\varphi)}$ ， $\beta = 0$ 。其中数据收集对称均衡成立范围为： $0 < \varphi \leq \frac{1}{2}, \frac{3}{2} < t \leq \frac{3}{8}(5 + 4\varphi + \sqrt{25 + 8\varphi(2\varphi - 1)})$ ， $0 \leq \Delta < \frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)}$  或者  $0 < \varphi < \frac{1}{2}, \frac{3}{8}(5 + 4\varphi + \sqrt{25 + 8\varphi(2\varphi - 1)}) < t < \bar{t}(\varphi)$ ， $0 \leq \Delta < t$ ；非对称均衡成立范围为：

$0 < \varphi \leq \frac{1}{2}, \frac{3}{2} < t \leq \frac{3}{8}(5 + 4\varphi + \sqrt{25 + 8\varphi(2\varphi - 1)})$ ， $\frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)} < \Delta < t$ 。其中 $\bar{t}(\varphi)$ 为等式 $27t + \frac{2(9-4t^2)}{t-\varphi} + 6\Delta - \frac{5\Delta^2}{t} + \frac{32t\Delta^2}{(5t-9\varphi)^2} -$

$\frac{9(t+\Delta-2)^2}{t-2\varphi} + \frac{24\Delta(2t+\Delta)}{5t-9\varphi} = 0$  满足条件的唯一解。

得到数据收集均衡结果后，减去研发投入成本可得  $\Pi_A$  和  $\Pi_B$ ，联立  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = 0$  和  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = 0$  可分别得数据收集对称均衡和非对称均衡的研发均衡结果。由于在  $\gamma > \frac{1}{t}$  时，非对称均衡的研发结果不满足  $\frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)} < \Delta < t$  这个范围，即数据收集的非对称均衡不成立，因此我们只需要考虑数据收集的对称均衡。对称均衡的研发均衡结果为： $e_A = \frac{7t-9\varphi}{3\gamma(5t-9\varphi)}$ ,  $e_B = \frac{7t-9\varphi}{3\gamma(5t-9\varphi)}$ ,  $\Delta = 0$  一定满足数据收集对称均衡成立范围；企业均衡利润为： $\Pi_A = \frac{1}{36} \left( 18t - \frac{2(7t-9\varphi)^2}{\gamma(5t-9\varphi)^2} + \frac{9-4t^2}{t-\varphi} \right)$ ,  $\Pi_B = \frac{1}{36} \left( 18t - \frac{2(7t-9\varphi)^2}{\gamma(5t-9\varphi)^2} + \frac{9-4t^2}{t-\varphi} \right)$ 。

由于  $\frac{3}{2} < t \leq \frac{3}{8} (5 + 4\varphi + \sqrt{25 + 8\varphi(2\varphi - 1)})$  时，数据收集均衡有两种，因此在此范围内需要考虑研发均衡偏离问题。求解偏离问题思路如下：企业有可能偏离均衡研发水平，使研发均衡偏离到  $\frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)} < \Delta < t$ ，进而改变数据收集均衡和企业利润。因为在  $\frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)} < \Delta < t$  范围内，企业 A 和企业 B 是不对称的，因此要分别考虑企业 A 和企业 B 的偏离。具体求解步骤如下。首先考虑企业 A 的偏离：给定企业 B 研发水平  $e_B = \frac{7t-9\varphi}{3\gamma(5t-9\varphi)}$ ，企业 A 提高研发水平偏离到  $\frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)} < \Delta < t$ ，可以证明偏离后，企业 A 最大偏离利润小于均衡利润，因此企业 A 不会偏离。其次考虑企业 B 的偏离：给定企业 A 研发水平  $e_A = \frac{7t-9\varphi}{3\gamma(5t-9\varphi)}$ ，企业 B 降低研发水平偏离到  $\frac{(2t-3)(5t-9\varphi)}{6(t-\varphi)} < \Delta < t$ 。发现当  $e_B$  偏离到  $e_B = \frac{3(t-\varphi)(9\varphi^2(9t\gamma-1)+t^2(5(3+5t)\gamma-7)+t\varphi(16-9(3+10t)\gamma))}{\gamma(5t-9\varphi)(49t^3\gamma-9\varphi^2+9t\varphi(2+9\gamma\varphi)-9t^2(1+14\gamma\varphi))}$  时，企业 B 偏离利润是最大的，偏离利润为： $\pi'_B = \frac{(9\varphi^2(9t\gamma-1)+t^2(5(3+5t)\gamma-7)+t\varphi(16-9(3+10t)\gamma))^2}{2\gamma(5t-9\varphi)^2(49t^3\gamma-9\varphi^2+9t\varphi(2+9\gamma\varphi)-9t^2(1+14\gamma\varphi))}$ 。将企业 B 偏离利润与均衡利润比较可得，当满足  $\frac{3}{2} < t < \{t_1, t_2\}$ ,  $\gamma > \hat{\gamma}(t, \varphi)$  或者  $\{t_1, t_2\} < t < \bar{t}(\varphi)$ ,  $\gamma > \frac{1}{t}$  时，企业 B 不会偏离，这也是数据收集对称均衡不会偏离的条件。其中  $\hat{\gamma}(t, \varphi) = \frac{27(2t-3)\varphi^2(27\varphi^2(2t-3)+2t^2(126t-143)-12t\varphi(16t-21))+t^4(2025+28t(59t-135))-4t^3\varphi(2835+2t(976t-2403))}{(5t-9\varphi)^2t(2t-3)(81\varphi^2(2t-3)+t^2(118t-93)-36\varphi(8t-9)t)}$ 。

将研发均衡代入数据收集量和各方福利表达式可得：

$$\text{数据收集量为：} \alpha = \beta = \frac{2t-3}{6(t-\varphi)};$$

$$\text{消费者剩余为：} CS = V_0 + \frac{(2t-3)^2 t}{18(t-\varphi)^2} + \frac{7t-9\varphi}{3(5t-9\varphi)\gamma} - \frac{5t}{4};$$

$$\text{社会福利为：} W = V_0 + \frac{1}{36} \left( \frac{2\varphi(13t^2-9)-3t(t(8+3t)-12)-9\varphi^2 t}{(\varphi-t)^2} + \frac{8(9\varphi-7t)(9\varphi-4t)}{(9\varphi-5t)^2 \gamma} \right)。$$

## 2. 验证结论是否成立

首先，我们对均衡结果进行  $\varphi$  和  $\gamma$  的比较静态分析。由于  $\varphi$  增加，数据收集成本下降，与基础模型中  $k$  减少的含义类似，我们发现除了社会福利，其余结论与基础模型一致。 $\gamma$  降低的结论与基础模型完全一致。

其次，我们检验价格歧视监管政策。发现  $CS^P > CS^{NP}$ ；当  $\varphi < \min\{\bar{\varphi}, \frac{1}{2}\}$ ,  $\hat{\gamma}(t, \varphi) < \gamma < \bar{\gamma}(t, \varphi)$  时，

$W^P > W^{NP}$ ，其余结果与基础模型一致。

### （五）企业先收集数据再研发创新

证明思路如下：首先我们需要求解企业先收集数据再研发创新的均衡结果；其次，我们需要验证基础模型中比较静态和价格歧视监管政策的结论是否成立。

#### 1. 求解均衡结果

由于只改变了收集数据和研发创新的博弈时序，定价仍然是第 3 期进行，因此定价均衡与基础模型相同。首先，我们求解研发均衡。联立  $\frac{\partial \pi_A}{\partial e_A} = 0$  和  $\frac{\partial \pi_B}{\partial e_B} = 0$  方程组可得： $e_A = \frac{1}{3\gamma} + \frac{2t(\alpha-\beta)}{9t\gamma-2}$ ， $e_B = \frac{1}{3\gamma} - \frac{2t(\alpha-\beta)}{9t\gamma-2}$ ，进而得到  $\Delta = e_A - e_B = \frac{4t(\alpha-\beta)}{9t\gamma-2}$ 。将研发均衡代入企业利润表达式可得均衡  $\pi_A$  和  $\pi_B$ 。

接下来，我们求解数据收集均衡。将企业利润减去数据收集成本得到  $\Pi_A$  和  $\Pi_B$ ，联立  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial \alpha} = 0$  和  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial \beta} = 0$  方程组可得： $\alpha = \frac{2t(9t\gamma-1)}{3(k+2t)(9t\gamma-2)}$ ， $\beta = \frac{2t(9t\gamma-1)}{3(k+2t)(9t\gamma-2)}$ ，将均衡数据收集量代入创新水平表达式中可得： $e_A = \frac{1}{3\gamma}$ ， $e_B = \frac{1}{3\gamma}$ 。进一步代入到企业定价和各方福利表达式中可得：

$$\text{企业统一定价： } p_A = p_B = t - \frac{4t^2(9t\gamma-1)}{3(k+2t)(9t\gamma-2)};$$

$$\text{企业个性化定价： } p_A(x) = 2t(1-x) - \frac{4t^2(9t\gamma-1)}{3(k+2t)(9t\gamma-2)}, \quad p_B(x) = 2tx - \frac{4t^2(9t\gamma-1)}{3(k+2t)(9t\gamma-2)};$$

$$\text{企业利润为： } \Pi_A = \Pi_B = \frac{(-1+9t\gamma)(k(2-9t\gamma)^2+2t(4+t\gamma(-34+63t\gamma)))}{18(k+2t)\gamma(2-9t\gamma)^2};$$

消费者剩余为：

$$CS = \int_0^\alpha (V_A - tx - p_A(x)) dx + \int_\alpha^z (V_A - tx - p_A) dx + \int_z^{1-\beta} (V_B - t(1-x) - p_B) dx + \int_{1-\beta}^1 (V_B - t(1-x) - p_B(x)) dx = V_0 + \frac{1}{3\gamma} + \frac{t(-45k^2-180kt-\frac{4t^2(172+9t\gamma(-164+333t\gamma))}{(2-9t\gamma)^2})}{36(k+2t)^2};$$

社会福利为：

$$W = \int_0^z (V_A - tx) dx + \int_z^1 (V_B - t(1-x)) dx - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = V_0 + \frac{1}{36}(\frac{8}{\gamma} + \frac{t(-9k^2-36t^2-\frac{4kt(40+9t\gamma(-44+117t\gamma))}{(2-9t\gamma)^2})}{(k+2t)^2}).$$

#### 2. 验证结论是否成立

首先，我们对企业先收集数据再研发创新的均衡结果进行  $k$  和  $\gamma$  的比较静态分析。由于创新水平  $e_A$  和  $e_B$  表达式与  $k$  无关，因此  $k$  变化， $e_A$  和  $e_B$  不变。其余结论与基础模型一致。

其次，我们检验价格歧视监管政策。发现  $W^P < W^{NP}$ ，其余结果与基础模型一致。

### （六）创新产品的生产成本上升

首先，对基础模型中消费者以统一定价购买企业产品获得效用等式进行  $P_i = p_i - \theta e_i$  和  $E_i = (1 - \theta)e_i$  的变量代换，得到： $V_0 + E_A - tx - P_A$  和  $V_0 + E_B - t(1-x) - P_B$ 。通过两个变量代换，我们可以得到与基础模型一致的消费者效用表达式，进而得到统一定价表达式：

$$P_A = \frac{1}{3}(t(3-4\alpha-2\beta) + E_A - E_B); \quad P_B = \frac{1}{3}(t(3-4\beta-2\alpha) + E_B - E_A).$$

企业收入表达式：

$$R_A = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+(E_A-E_B))^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6-5\alpha-4\beta)+2(E_A-E_B));$$

$$R_B = \frac{(t(3-4\beta-2\alpha)-(E_A-E_B))^2}{18t} + \frac{1}{3}\beta(t(6-5\beta-4\alpha)-2(E_A-E_B))。$$

其次，在数据收集阶段，对基础模型中的 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行 $E_A = (1-\theta)e_A$ 和 $E_B = (1-\theta)e_B$ 的变量代换，得到创新产品的生产成本上升情形下的均衡数据收集量：

$$\alpha = \frac{2(9kt+10t^2+3k((1-\theta)e_A-(1-\theta)e_B)+6t((1-\theta)e_A-(1-\theta)e_B))}{27k^2+84kt+60t^2};$$

$$\beta = \frac{2(9kt+10t^2-3k((1-\theta)e_A-(1-\theta)e_B)-6t((1-\theta)e_A-(1-\theta)e_B))}{27k^2+84kt+60t^2}。$$

最后，在研发阶段，对 $\Pi_A$ 和 $\Pi_B$ 使用 $E_i = (1-\theta)e_i$ 和 $\frac{\gamma}{(1-\theta)^2} = \tilde{\gamma}$ 两个变量代换，得到：

$$\Pi_A = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+(E_A-E_B))^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6-5\alpha-4\beta)+2(E_A-E_B)) - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(E_A)^2;$$

$$\Pi_B = \frac{(t(3-4\beta-2\alpha)-(E_A-E_B))^2}{18t} + \frac{1}{3}\beta(t(6-5\beta-4\alpha)-2(E_A-E_B)) - \frac{1}{2}k\beta^2 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(E_B)^2。$$

研发阶段企业利润表达式与基础模型企业利润表达式一致，其中 $\tilde{\gamma}$ 、 $E_A$ 、 $E_B$ 是变量替换后的结果。

通过变量代换可以得到，创新产品的生产成本上升设定下的表达式与基础模型一致<sup>①</sup>。因此，比较静态和价格歧视监管政策的所有结论都保持不变。

---

<sup>①</sup> 我们通过直接计算得到了与变量代换后一致的结果。

## 附录III 政府允许个性化定价的数学证明

### 一、引理1的证明

我们按照逆向归纳法，分三步证明引理1。首先，我们刻画了在给定任意数据收集量组合（ $\alpha$ 和 $\beta$ ）下，企业的最优定价策略，并由此推导出企业相应的收入函数；其次，根据企业收入与数据收集量的关系，我们可以找到给定对方数据收集量，企业使自己利润最大的数据收集量，即 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最优反应函数；最后，我们联立 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最优反应函数并求解其交点，即为数据收集均衡点，通过确定交点存在的范围，进一步明确了均衡存在的参数条件。

#### （一）求出不同 $\alpha$ 和 $\beta$ 范围内企业收入表达式

当定价均衡为每个企业都在统一定价区域获得部分消费者时，根据边际消费者 $z$ 的定义，得到企业统一定价区域收入： $p_A(z - \alpha)$ 和 $p_B(1 - \beta - z)$ 。每个企业选择统一定价 $p_A$ 和 $p_B$ 最大化统一定价区域收入，得到均衡统一定价：

$$p_A = \frac{1}{3}(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta), \quad p_B = \frac{1}{3}(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta);$$

将均衡 $p_A$ 和 $p_B$ 代入边际消费者 $z$ 的表达式中可得： $z = \frac{t(3+2\alpha-2\beta)+\Delta}{6t}$ 。

每个企业都在统一定价区域获得部分消费者，要求统一定价都高于边际成本，即 $p_A > 0$ 且 $p_B > 0$ 。将 $p_A$ 和 $p_B$ 表达式代入 $p_A > 0$ 且 $p_B > 0$ 得到： $0 < \beta \leq \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}, 0 < \alpha < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 。为了简化表述，我们定义 $\hat{\alpha} \equiv \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 。

在求解不同 $\alpha$ 和 $\beta$ 范围内企业收入表达式之前，我们需要定义一个关键消费者位置 $z^N$ 。 $z^N$ 决定了如果两个企业收集了全部消费者数据，每个企业的市场份额是哪个区域。

当竞争对手价格为边际成本时，我们将企业可以通过个性化定价获得的最远消费者位置定义为 $z^N$ ，此时两个企业对 $z^N$ 的定价都是边际成本，即 $z^N$ 满足：

$$V_A - tz^N = V_B - t(1 - z^N) \Rightarrow z^N = \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}。$$

意味着，A 一定能通过个性化定价获得 $[0, \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}]$ 范围内消费者，B 一定能通过个性化定价获得 $[\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}, 1]$ 范围内消费者。

接下来，我们求解不同 $\alpha$ 和 $\beta$ 范围内企业总收入表达式。由于给定任意一个 $\beta$ ，随着 $\alpha$ 变化，企业总收入表达式会发生变化。根据 $\hat{\alpha}$ 与 $1 - \beta$ 的相对位置，我们将 $\beta$ 分成两个范围进行讨论：

（1）当 $0 < \hat{\alpha} < 1 - \beta < 1$ 时，将 $\hat{\alpha} = \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 代入可得 $\beta$ 范围为： $0 < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t} < 1 - \beta < 1 \Rightarrow 0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ ；

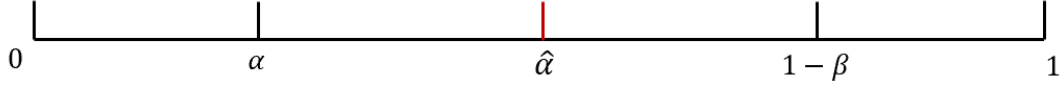
（2）当 $0 < 1 - \beta < \hat{\alpha} < 1$ 时， $\beta$ 范围为： $0 < 1 - \beta < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < 1$ 。

接下来，我们依次对 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 和 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < 1$ 两个范围进行讨论。

1. 第一个 $\beta$ 范围：当 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 时

给定 $\beta$ 范围， $\alpha$ 从 $\alpha = 0$ 开始增加，先是 $0 < \alpha < \hat{\alpha}$ ，然后增加到 $\hat{\alpha} < \alpha < 1$ 。 $\alpha$ 在增加过程中， $p_A$ 从 $p_A > 0$ 变为 $p_A = 0$ 。因此，根据 $\alpha$ 与 $\hat{\alpha}$ 的大小关系，我们需要分两种情况讨论，不同情况下 $p_A$ 表达式不同，企业总收入表达式也不同。

(1) 当 $0 < \alpha < \hat{\alpha}$ 时



$$p_A = \frac{1}{3}(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta) > 0, \quad p_B = \frac{1}{3}(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta) > 0, \quad \text{将 } p_A \text{ 和 } p_B \text{ 表达式代入企业}$$

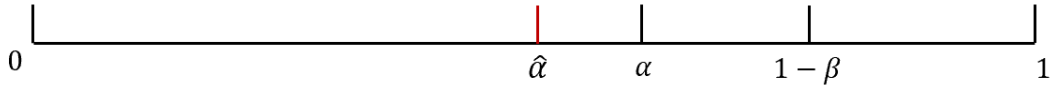
A 统一定价区域收入表达式中，可得 $p_A(z - \alpha) = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t}$ 。进一步可得 A 个性化定价表达式：

$$p_A(x) = t(1 - 2x) + p_B + \Delta = t(1 - 2x) + \frac{1}{3}t(3 - 2\alpha - 4\beta) + \Delta, \quad \text{以及 A 个性化定价区域收入表达}$$

$$\text{式：} \int_0^{\alpha} (p_A(x)) dx = \frac{1}{3}\alpha(t(6 - 5\alpha - 4\beta) + 2\Delta). \quad \text{将统一定价区域收入和个性化定价区域收入加总即}$$

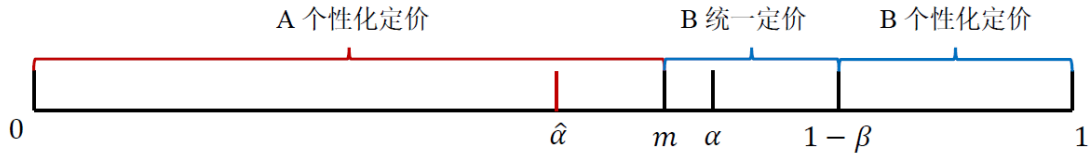
$$\text{可得企业 A 总收入：} R_A = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6 - 5\alpha - 4\beta) + 2\Delta).$$

(2) 当 $\hat{\alpha} < \alpha < 1$ 时



此时 $p_A = 0$ ，我们需要分析企业 B 如何制定 $p_B$ 最大化统一定价区域收入。如下图所示，企业 B 通过统一定价 $p_B$ 获得 $[m, 1 - \beta]$ 范围内消费者。对于边际消费者 $m$ 来说，以个性化定价购买 A 产品和以统一定价购买 B 产品无差异。企业 A 会降低个性化定价一直到边际成本为止，因此 A 对 $m$ 位置消费者个性化定价为 $p_A(m) = 0$ 。为了最大化定价，企业 B 制定统一定价 $p_B$ ，使 $m$ 位置的消费者恰好愿意购买 B 产品，消费者效用满足：

$$V_A - tm - p_A(m) = V_B - t(1 - m) - p_B \Rightarrow m = \frac{t + p_B + \Delta}{2t}.$$



可得 B 统一定价区域收入为： $p_B(1 - \beta - m) = p_B \left(1 - \beta - \frac{t + p_B + \Delta}{2t}\right)$ 。令 B 统一定价区域收入关

于 $p_B$ 的一阶导数等于 0，可得： $p_B = \frac{1}{2}(t(1 - 2\beta) - \Delta)$ ，将 $p_B$ 代入到 $m$ 表达式中可得： $m = \frac{(3-2\beta)t + \Delta}{4t} =$

$\hat{\alpha}$ 。因此，B 使统一定价区域收入最大的统一定价为： $p_B = \frac{1}{2}(t(1 - 2\beta) - \Delta)$ 。进一步可得 A 个性化

定价表达式： $p_A(x) = t(1 - 2x) + p_B + \Delta = t(1 - 2x) + \frac{1}{2}(t(1 - 2\beta) - \Delta) + \Delta = \frac{1}{2}(t(3 - 4x - 2\beta) +$

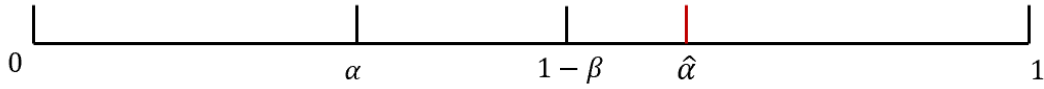
$\Delta)$ ，以及 A 个性化定价区域收入表达式： $\int_0^m (p_A(x)) dx = \frac{(t(3-2\beta)+\Delta)^2}{16t}$ 。A 个性化定价区域收入即为

企业 A 总收入:  $R_A = \frac{(t(3-2\beta)+\Delta)^2}{16t}$ 。

汇总  $0 < \alpha < \hat{\alpha}$  和  $\hat{\alpha} < \alpha < 1$  两种情况下企业 A 总收入表达式可得, A 总收入表达式是一个分段函数, 并且在分段处 ( $\hat{\alpha} = \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ ) 是连续的:

$$R_A = \begin{cases} \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6-5\alpha-4\beta)+2\Delta), & 0 < \alpha < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t} \\ \frac{(t(3-2\beta)+\Delta)^2}{16t}, & \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t} < \alpha < 1 \end{cases}$$

2. 第二个  $\beta$  范围: 当  $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < 1$  时



对  $p_B = \frac{1}{3}(t(3-2\alpha-4\beta)-\Delta)$  分析可得: 当  $\beta$  比较小时,  $\alpha$  比较小时,  $p_B > 0$ , 随着  $\alpha$  增大,  $p_B$  降低, 一直到  $p_B = 0$ ; 当  $\beta$  比较大时, 无论  $\alpha$  多大,  $p_B = 0$ 。因此我们需要进一步将  $\beta$  分为两段进行分析。

(1) 当  $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$  时: 在  $0 < \alpha < \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t}$  范围内,  $p_B > 0$ ; 在  $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < 1$  范围内,  $p_B = 0$ ;

(2) 当  $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$  时, 在  $0 < \alpha < 1$  范围内,  $p_B = 0$ 。

接下来, 依次求解这两种情况下企业 A 收入表达式。

(1) 当  $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$  时

① 在  $0 < \alpha < \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t}$  范围内,  $p_A > 0$ ,  $p_B > 0$ 。与  $\alpha$  和  $\beta$  范围为  $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ ,  $0 < \alpha < \hat{\alpha}$  情形

类似, 求解过程不再重复叙述, 此时企业 A 总收入为:  $R_A = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6-5\alpha-4\beta)+2\Delta)$ 。

② 在  $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < 1$  范围内,  $p_B = 0$ , 我们需要求解企业 A 最优统一定价  $p_A$ 。需要说明的是,

因为  $\beta > \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ , 所以如果  $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ , 此时  $\alpha + \beta > 1$ , 两个企业收集了市场中所有消费者数据, 统一定价区域消失, 两个企业统一定价都降为边际成本:  $p_A = 0$ ,  $p_B = 0$ 。因此我们讨论 A 如何制定最优统一定价应该在  $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$  范围内进行。

企业 A 通过  $p_A$  获得  $[\alpha, m]$  范围内消费者。对于边际消费者  $m$  来说, 以  $p_A$  购买 A 产品和以个性化定价  $p_B(m)$  购买 B 产品无差异。B 会降低个性化定价直到边际成本为止, 因此 B 对  $m$  位置消费者个性化定价为  $p_B(m) = 0$ 。为了最大化价格, 企业 A 制定统一定价  $p_A$ , 使  $m$  位置的消费者恰好愿意购买 A 的产品, 消费者效用满足:

$$V_A - tm - p_A = V_B - t(1-m) - p_B(m) \Rightarrow m = \frac{t-p_A+\Delta}{2t}。$$

进而可得企业 A 统一定价区域收入为:  $p_A(m-\alpha) = p_A\left(\frac{t-p_A+\Delta}{2t} - \alpha\right)$ 。令 A 统一定价区域收入

关于 $p_A$ 的一阶导数等于0,可得: $p_A = \frac{1}{2}(t(1-2\alpha) + \Delta)$ ,将其代入到 $m$ 表达式中可得: $m = \frac{t(1+2\alpha)+\Delta}{4t}$ 。

在满足 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 和 $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 条件下,  $1 - \beta < m < 1$ 。因此, A 使统一定价区域

收入最大的统一定价为:  $p_A = \frac{1}{2}(t(1-2\alpha) + \Delta)$ ; 得到 A 统一定价区域收入为:  $p_A(m - \alpha) =$

$\frac{(t(1-2\alpha)+\Delta)^2}{8t}$ 。A 个性化定价表达式为:  $p_A(x) = t(1-2x) + p_B + \Delta = t(1-2x) + \Delta$ , 进而可得 A 个

性化定价区域收入表达式:  $\int_0^\alpha (p_A(x)) dx = \alpha(t(1-\alpha) + \Delta)$ 。将统一定价区域收入和个性化定价区

域收入加总即可得企业 A 总收入:  $R_A = \frac{(t(1-2\alpha)+\Delta)^2}{8t} + \alpha(t(1-\alpha) + \Delta)$ 。

当 $\alpha$ 增加到 $\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 时,企业 A 和 B 都没有统一定价区域,A 通过个性化定价获得 $[0, \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}]$

范围内消费者, B 通过个性化定价获得 $[\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}, 1]$ 范围内消费者。此时统一定价 $p_A = 0, p_B = 0$ , A 个

性化定价表达式为: $p_A(x) = t(1-2x) + p_B + \Delta = t(1-2x) + \Delta$ , A 个性化定价区域收入表达式为:

$\int_0^{\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}} (p_A(x)) dx = \frac{(t+\Delta)^2}{4t}$ 。A 个性化定价区域收入即为 A 总收入:  $R_A = \frac{(t+\Delta)^2}{4t}$ 。

汇总 $0 < \alpha < \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t}$ 、 $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 和 $\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 三种情况下企业 A 总收入表达式可得, 企业 A 总收入表达式是一个连续分段函数:

$$R_A = \begin{cases} \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6-5\alpha-4\beta) + 2\Delta), & 0 < \alpha < \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} \\ \frac{(t(1-2\alpha)+\Delta)^2}{8t} + \alpha(t(1-\alpha) + \Delta), & \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} \\ \frac{(t+\Delta)^2}{4t}, & \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1 \end{cases}$$

(2) 当 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 时

在 $0 < \alpha < 1$ 范围内,  $p_B = 0$ 。与 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ ,  $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 情形的求解思路类似。先

在 $0 < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 范围内, 求解企业 A 最优定价以及企业 A 总收入表达式, 再在 $\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 范围

内, 求解当两个企业收集全部消费者数据时企业 A 总收入表达式, 求解过程不再重复赘述。当 $\frac{3}{4} -$

$\frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 时, 企业 A 总收入表达式是一个连续分段函数:

$$R_A = \begin{cases} \frac{(t(1-2\alpha)+\Delta)^2}{8t} + \alpha(t(1-\alpha) + \Delta), & 0 < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} \\ \frac{(t+\Delta)^2}{4t}, & \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1 \end{cases}$$

最后, 汇总以上情形可分别得到, 当 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 时、 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时、 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 时企业 A 总收入表达式。企业 B 总收入表达式求解过程与 A 类似, 不再重复叙述。下面直接给出企业 B 总收入表达式。

$$\begin{aligned}
\text{当 } 0 < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} \text{ 时, } R_B &= \begin{cases} \frac{(t(3-2\alpha-4\beta)-\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\beta(t(6-4\alpha-5\beta)-2\Delta), & 0 < \beta < \frac{3t-2t\alpha-\Delta}{4t}; \\ \frac{(t(3-2\alpha)-\Delta)^2}{16t}, & \frac{3t-2t\alpha-\Delta}{4t} < \beta < 1; \end{cases} \\
\text{当 } \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < \frac{3}{4} + \frac{\Delta}{4t} \text{ 时, } R_B &= \begin{cases} \frac{(t(3-2\alpha-4\beta)-\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\beta(t(6-4\alpha-5\beta)-2\Delta), & 0 < \beta < \frac{3t-4t\alpha+\Delta}{2t}; \\ \frac{(t(1-2\beta)-\Delta)^2}{8t} + \beta(t(1-\beta)-\Delta), & \frac{3t-4t\alpha+\Delta}{2t} < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}; \\ \frac{(t-\Delta)^2}{4t}, & \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < 1; \end{cases} \\
\text{当 } \frac{3}{4} + \frac{\Delta}{4t} < \alpha < 1 \text{ 时, } R_B &= \begin{cases} \frac{(t(1-2\beta)-\Delta)^2}{8t} + \beta(t(1-\beta)-\Delta), & 0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}; \\ \frac{(t-\Delta)^2}{4t}, & \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

## (二) 求出 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最优反应函数表达式

我们先求解企业 A 收集数据的最优反应函数, 企业 B 求解思路类似。求解思路如下: 首先, 将企业 A 总收入表达式减去数据收集成本得到企业 A 利润 $\pi_A$ 表达式。其次, 在每个 $\beta$ 范围内求解最优的 $\alpha$ , 然后将所有 $\beta$ 范围的结果进行汇总, 得到完整的 $\alpha$ 最优反应函数表达式。根据第一步分析, 我们分别在 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 、 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 和 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 三个范围内求解最优的 $\alpha$ 。

### 1. 第一个 $\beta$ 范围: 当 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 时

首先, 分析当 $0 < \alpha < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 时, 企业 A 数据收集量 $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系。令 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的一阶导数 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}$ 等于 0 得到 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ , 继续求解 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的二阶导数得到 $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial \alpha^2} < 0$ , 因此 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 是 $\pi_A$ 的最大值。验证在 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 范围内,  $\pi_A$ 能否取到最大值 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ , 发现在 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 范围内,  $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 一定满足 $0 < \alpha < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 。因此, 在 $0 < \alpha < \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 范围内,  $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系是倒 U 型, 即 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 时,  $\pi_A$ 最大。

其次, 以同样的思路分析当 $\frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t} < \alpha < 1$ 时,  $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系, 得到 $\pi_A$ 是关于 $\alpha$ 的单调递减函数, 因此当 $\alpha = \frac{3}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4t}$ 时,  $\pi_A$ 最大。

因为在 $0 < \alpha < 1$ 范围内,  $\pi_A$ 是关于 $\alpha$ 的连续函数, 所以使 $\pi_A$ 最大的数据收集量为: $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 。

### 2. 第二个 $\beta$ 范围: 当 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时

首先, 分析当 $0 < \alpha < \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t}$ 时,  $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系。令 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的一阶导数 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}$ 等于 0 得到 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ , 继续求解 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的二阶导数得到 $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial \alpha^2} < 0$ , 因此 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 是 $\pi_A$ 的最大值。验证 $\pi_A$ 能否取到最大值 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 。当 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{9kt+10t^2-3k\Delta-6t\Delta}{4t(3k+4t)}$ 时,  $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系是倒 U 型, 因此 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 时 $\pi_A$ 最大; 当 $\frac{9kt+10t^2-3k\Delta-6t\Delta}{4t(3k+4t)} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时,  $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系是单调递增, 因此 $\alpha = \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时 $\pi_A$ 最大。

$\frac{\Delta}{4t}$ 时 $\pi_A$ 最大。

其次，分析当 $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 时， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系。令 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的一阶导数 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}$ 等于0得到 $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ ，继续求解 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的二阶导数得到 $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial \alpha^2} < 0$ 。验证 $\pi_A$ 能否取到最大值 $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 。当 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3kt+2t^2-k\Delta-2t\Delta}{4t(k+t)}$ 时， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系是单调递减，因此 $\alpha = \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t}$ 时 $\pi_A$ 最大；当 $\frac{3kt+2t^2-k\Delta-2t\Delta}{4t(k+t)} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系是倒U型，因此 $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 时 $\pi_A$ 最大。

最后，分析当 $\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 时， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系，得到 $\pi_A$ 是关于 $\alpha$ 的单调递减函数，因此当 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 时 $\pi_A$ 最大。

汇总 $0 < \alpha < \frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t}$ 、 $\frac{3t-4t\beta-\Delta}{2t} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 和 $\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 三段利润形状，发现当 $\beta$ 范围不同时，使 $\pi_A$ 最大的 $\alpha$ 取值也不同，可以将 $\beta$ 分为以下三段进行分析。

① 当 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta \leq \frac{3kt+2t^2-k\Delta-2t\Delta}{4t(k+t)}$ 时， $\alpha$ 增加， $\pi_A$ 先增加后一直减少，利润最大值位于： $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ ；

② 当 $\frac{3kt+2t^2-k\Delta-2t\Delta}{4t(k+t)} < \beta \leq \frac{9kt+10t^2-3k\Delta-6t\Delta}{4t(3k+4t)}$ 时， $\alpha$ 增加， $\pi_A$ 先增加后减少，再增加，最后一直减少。因此存在两个顶点，都有可能是利润最大值，通过比较两个顶点利润得到：当 $\frac{3kt+2t^2-k\Delta-2t\Delta}{4t(k+t)} < \beta \leq \frac{3t+\Delta}{2t} - \frac{(t+\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$ 时，利润最大值位于： $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ ；当 $\frac{3t+\Delta}{2t} - \frac{(t+\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}} < \beta \leq \frac{9kt+10t^2-3k\Delta-6t\Delta}{4t(3k+4t)}$ 时，利润最大值位于： $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 。

③ 当 $\frac{9kt+10t^2-3k\Delta-6t\Delta}{4t(3k+4t)} < \beta \leq \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时， $\alpha$ 增加， $\pi_A$ 先增加后一直减少，利润最大值位于： $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 。

将①、②、③三种情况汇总得到：

当 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta \leq \frac{6t+2\Delta-\sqrt{9+\frac{5t}{k+t}}(t+\Delta)}{4t}$ 时，使 $\pi_A$ 最大的数据收集量为： $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ ；

当 $\frac{6t+2\Delta-\sqrt{9+\frac{5t}{k+t}}(t+\Delta)}{4t} < \beta \leq \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 时，使 $\pi_A$ 最大的数据收集量为： $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 。

3. 第三个 $\beta$ 范围：当 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 时

首先，分析当 $0 < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 时， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系。令 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的一阶导数 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha}$ 等于0得到 $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ ，

继续求解 $\pi_A$ 关于 $\alpha$ 的二阶导数得到 $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial \alpha^2} < 0$ 。验证在 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 范围内， $\pi_A$ 能否取到最大值 $\alpha =$

$\frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ ，发现在 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 范围内， $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 一定满足 $0 < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 。因此，在 $0 < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 范围

内， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系是倒U型，即 $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 时， $\pi_A$ 最大。

其次，分析当 $\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t} < \alpha < 1$ 时， $\alpha$ 与 $\pi_A$ 的关系，得到 $\pi_A$ 是关于 $\alpha$ 的单调递减函数，因此当 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2t}$ 时， $\pi_A$ 最大。

因为在 $0 < \alpha < 1$ 范围内， $\pi_A$ 是关于 $\alpha$ 的连续函数，所以使 $\pi_A$ 最大的数据收集量为： $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 。

4. 汇总 $0 < \beta < \frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t}$ 、 $\frac{1}{2} - \frac{\Delta}{2t} < \beta < \frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t}$ 和 $\frac{3}{4} - \frac{\Delta}{4t} < \beta < 1$ 三种情况可得 $\alpha$ 最优反应函数为：

当 $0 < \beta \leq \frac{3t+\Delta}{2t} - \frac{(t+\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$ 时， $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ ；

当 $\frac{3t+\Delta}{2t} - \frac{(t+\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}} < \beta < 1$ 时， $\alpha = \frac{t+\Delta}{2(t+k)}$ 。

5. 企业B收集数据( $\beta$ )的最优反应函数，与企业A求解思路类似，不再重复赘述。我们直接给出 $\beta$ 最优反应函数为：

当 $0 < \alpha \leq \frac{3t-\Delta}{2t} - \frac{(t-\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$ 时， $\beta = \frac{2(3t-2t\alpha-\Delta)}{14t+9k}$ ；

当 $\frac{3t-\Delta}{2t} - \frac{(t-\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}} < \alpha < 1$ 时， $\beta = \frac{t-\Delta}{2(t+k)}$ 。

(三) 联立 $\alpha$ 最优反应函数和 $\beta$ 最优反应函数表达式，找到最优反应函数交点，以及交点存在的条件

联立 $\alpha$ 和 $\beta$ 最优反应函数得到两个企业只有可能在 $0 < \beta \leq \frac{3t+\Delta}{2t} - \frac{(t+\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$ 和 $0 < \alpha \leq \frac{3t-\Delta}{2t} - \frac{(t-\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$ 范围内存在交点（如下图所示）。

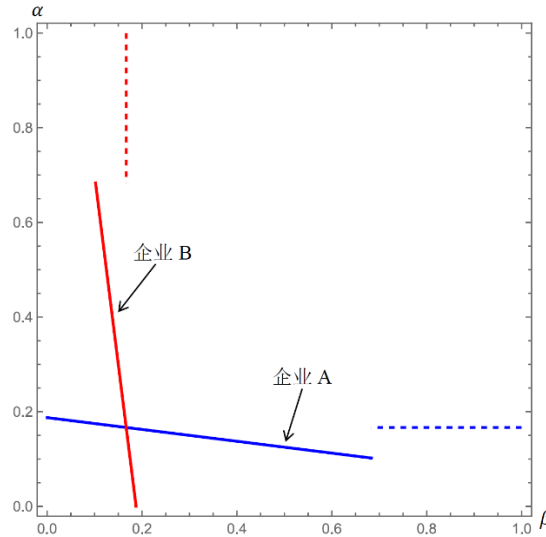


图 11-3 数据收集量最优反应函数（参数赋值： $\Delta = 0$ ， $k = 2$ ， $t = 1$ ）

联立 $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{14t+9k}$ 和 $\beta = \frac{2(3t-2t\alpha-\Delta)}{14t+9k}$ 可得： $\alpha = \frac{2t}{3(2t+k)} + \frac{2\Delta}{10t+9k}$ ， $\beta = \frac{2t}{3(2t+k)} - \frac{2\Delta}{10t+9k}$ 。将均衡结

果代入到  $0 < \alpha \leq \frac{3t-\Delta}{2t} - \frac{(t-\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$  和  $0 < \beta \leq \frac{3t+\Delta}{2t} - \frac{(t+\Delta)}{4t} \sqrt{\frac{14t+9k}{t+k}}$  中, 可得当  $0 \leq \Delta < \frac{5}{33}(2\sqrt{14}-1)t \approx 0.98t, k \geq 0$  即可; 当  $\frac{5}{33}(2\sqrt{14}-1)t < \Delta < t$  时, 要求  $k > \tilde{k} > 0$ 。令  $f(k) = 567k^4 + 2232tk^3 + 2856t^2k^2 + 1184t^3k - 16t^4$ ,  $\tilde{k}$  为  $f(k) = 0$  满足  $t > 0$  和  $k > 0$  的唯一解。当  $t = 1$  时,  $\tilde{k} \approx 0.013$ 。

我们定义数据收集成本临界值  $\hat{k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \Delta < \frac{5}{33}(2\sqrt{14}-1)t \\ \tilde{k}, & \frac{5}{33}(2\sqrt{14}-1)t < \Delta < t \end{cases}$ ,  $\hat{k}$  是一个分段函数,  $\hat{k}$

的取值取决于  $\Delta$  大小。为了确保在  $0 \leq \Delta < t$  范围内, 数据收集纯策略均衡都成立, 我们要求  $k > \hat{k}$ 。

## 二、命题 1 的证明

将  $\alpha = \frac{2t}{3(2t+k)} + \frac{2\Delta}{10t+9k}$ ,  $\beta = \frac{2t}{3(2t+k)} - \frac{2\Delta}{10t+9k}$  代入到  $\pi_A$  中可得:  $\pi_A = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6-5\alpha-4\beta)+2\Delta) - \frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{(9k+14t)(3k(3t+\Delta)+2t(5t+3\Delta))^2}{18t(k+2t)(9k+10t)^2}$ 。

当  $\Delta > 0$  时, 对  $\alpha$  和  $\pi_A$  进行  $\Delta$  和  $k$  的比较静态分析, 可得:

$$(1) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \Delta} = \frac{2}{10t+9k} > 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \pi_A}{\partial \Delta} = \frac{(9k+14t)(3k(3t+\Delta)+2t(5t+3\Delta))}{3t(9k+10t)^2} > 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial k} = -\frac{2t}{3(k+2t)^2} - \frac{18\Delta}{(9k+10t)^2} < 0;$$

$$(4) \quad \frac{\partial \pi_A}{\partial k} = \frac{2t^2}{9(k+2t)^2} - \frac{12t\Delta}{(9k+10t)^2} - \frac{2(27k+46t)\Delta^2}{(9k+10t)^3}, \quad \text{当 } 0 < \Delta < \frac{t(9k+10t)^2}{3(k+2t)(27k+46t)} \text{ 时, } \frac{\partial \pi_A}{\partial k} > 0; \quad \text{当}$$

$$\frac{t(9k+10t)^2}{3(k+2t)(27k+46t)} < \Delta < t \text{ 时, } \frac{\partial \pi_A}{\partial k} < 0。$$

## 三、政府允许个性化定价均衡的证明

将数据收集阶段企业利润减去研发投入成本可得:

$$\Pi_A = \pi_A - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 = \frac{(9k+14t)(3k(3t+\Delta)+2t(5t+3\Delta))^2}{18t(k+2t)(9k+10t)^2} - \frac{1}{2}\gamma e_A^2。$$

令  $\Pi_A$  关于  $e_A$  的一阶导数  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = 0$  得到  $e_A = \frac{(9k+14t)(t(9k+10t)-3(k+2t)e_B)}{-3(k+2t)(9k+14t)+3t(9k+10t)^2\gamma}$ , 继续求解  $\Pi_A$  关于  $e_A$  的二阶

导数得到  $\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial e_A^2} = \frac{(k+2t)(9k+14t)}{t(9k+10t)^2} - \gamma$ , 令  $\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial e_A^2} < 0$  得到  $\gamma > \frac{(k+2t)(9k+14t)}{t(9k+10t)^2}$ 。同理, 令  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = 0$  得到  $e_B =$

$\frac{(9k+14t)(t(9k+10t)-3(k+2t)e_A)}{-3(k+2t)(9k+14t)+3t(9k+10t)^2\gamma}$ 。联立  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = 0$  和  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = 0$  方程组可得:  $e_A = \frac{9k+14t}{3\gamma(9k+10t)}$ ,  $e_B = \frac{9k+14t}{3\gamma(9k+10t)}$ , 进

而得到均衡  $\Delta = e_A - e_B = 0$ 。将研发均衡代入数据收集均衡和各方福利可得以下表达式:

$$\text{数据收集量为: } \alpha = \beta = \frac{2t}{3(k+2t)};$$

$$\text{企业统一定价为: } p_A = \frac{t(3k+2t)}{3(k+2t)}, \quad p_B = \frac{t(3k+2t)}{3(k+2t)};$$

企业个性化定价为：  $p_A(x) = \frac{t(3k+2t)}{3(k+2t)} + t(1-2x)$ ,  $p_B(x) = \frac{t(3k+2t)}{3(k+2t)} + t(2x-1)$ ;

企业利润为：  $\Pi_A = \Pi_B = \frac{1}{18}(9k+14t)(\frac{t}{k+2t} - \frac{9k+14t}{(9k+10t)^2\gamma})$ ;

消费者剩余为：

$$CS = \int_0^\alpha (V_A - tx - p_A(x)) dx + \int_\alpha^z (V_A - tx - p_A) dx + \int_z^{1-\beta} (V_B - t(1-x) - p_B) dx + \int_{1-\beta}^1 (V_B - t(1-x) - p_B(x)) dx = V_0 + \frac{9k+14t}{3\gamma(9k+10t)} - \frac{t(45k^2+180kt+148t^2)}{36(k+2t)^2};$$

社会福利为：

$$W = \int_0^z (V_A - tx) dx + \int_z^1 (V_B - t(1-x)) dx - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = V_0 + \frac{2(9k+8t)(9k+14t)}{9(9k+10t)^2\gamma} - \frac{t(9k^2+52kt+36t^2)}{36(k+2t)^2}.$$

#### 四、确定 $\gamma$ 范围的证明

为了简化 $\gamma$ 范围，我们引入两个企业有全部消费者数据时的社会最优情形。根据引理 1 中对  $z^N$  的定义，从社会最优的角度，应该让  $[0, z^N]$  消费者去 A 购买， $[z^N, 1]$  消费者去 B 购买。社会福利为：

$$W^{FB} = \int_0^{z^N} (V_A - tx) dx + \int_{z^N}^1 (V_B - t(1-x)) dx - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 - \frac{1}{2}\gamma e_B^2. \text{ 由此可得社会最优的目标函数为：}$$

$\max_{e_A, e_B} W^{FB}$ 。社会福利有最大值需要满足海塞矩阵负定，得到  $\gamma > \frac{1}{t}$ 。需要说明的是，即使考虑仅

满足  $\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial e_A^2} < 0$  条件的  $\gamma$  范围，论文结论仍然不变，只是比较静态和对比分析的范围更加繁琐，因此为

了使结果更加简洁，我们采用  $\gamma > \frac{1}{t}$  的范围。现实中企业进行研发投入改善生产线和生产模式需要较多的人力、物力和资金支持，因此企业研发投入的边际成本较高，与这一假设相符。

#### 五、企业 A (B) 从 0 (1) 处开始收集数据是最优的证明

如果允许企业 A 从某个大于 0 的位置开始收集消费者数据，我们可以证明，在两个企业都通过统一定价竞争中间无数据区域消费者的均衡下，企业 A 从 0 处开始收集数据是最优的。

证明思路如下：给定企业 B 的数据收集范围  $[1-\beta, 1]$ ，让企业 A 任意选择数据收集范围  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ，使两个企业竞争统一定价区域消费者。企业 A 数据收集量为  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ，A 选择数据收集起始点  $\alpha_1$  和数据收集量  $\alpha$  后，数据收集终点  $\alpha_2$  自然确定。首先，给定企业 A 数据收集范围  $\alpha$  和数据收集起始点  $\alpha_1$ ，我们求解企业 A 定价均衡。求解方式与原文引理 1 类似，企业统一定价为： $p_A =$

$$\frac{1}{3}(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta), \quad p_B = \frac{1}{3}(t(3-2\alpha-4\beta)-\Delta); \text{ 统一定价区域边际消费者位置为： } z =$$

$$\frac{t(3+2\alpha-2\beta)+\Delta}{6t}, \text{ 企业竞争统一定价区域消费者需要满足： } \alpha_2 < z < 1-\beta; \text{ 可得企业 A 收入为： } R_A =$$

$$\frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6+\alpha-4\beta)+2\Delta-6t(\alpha_1+\alpha)). \text{ 接着，我们求解使企业 A 利润最大的 } \alpha \text{ 和 } \alpha_1.$$

$$\text{观察 } \pi_A = \frac{(t(3-4\alpha-2\beta)+\Delta)^2}{18t} + \frac{1}{3}\alpha(t(6+\alpha-4\beta)+2\Delta-6t(\alpha_1+\alpha)) - \frac{1}{2}k\alpha^2 \text{ 发现， } \pi_A \text{ 是 } \alpha_1 \text{ 的单调减函数，}$$

即 $\alpha_1$ 增加, $\pi_A$ 减少,因此使 $\pi_A$ 最大的 $\alpha_1$ 为0。当 $\alpha_1 = 0$ 时,使 $\pi_A$ 最大的数据收集量为: $\alpha = \frac{2(3t-2t\beta+\Delta)}{9k+14t} = \frac{2t}{3(k+2t)} + \frac{2\Delta}{9k+10t}$ ,与论文中的最优数据收集量一致。当企业A选择最优数据收集范围后,企业A和B都没有激励改变价格偏离定价均衡。同理可证,企业B从1处开始收集数据是最优的。

## 六、命题2的证明

企业A和B是对称的,因此我们以A为例进行证明。首先,对创新水平,企业利润、消费者剩余和社会福利进行 $k$ 的比较静态分析。计算可得:

- (1)  $\frac{\partial e_A}{\partial k} = -\frac{12t}{\gamma(10t+9k)^2} < 0$ ;
- (2)  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial k} = \frac{2t^2}{9(k+2t)^2} + \frac{4t(9k+14t)}{(9k+10t)^3\gamma} > 0$ ;
- (3)  $\frac{\partial CS}{\partial k} = -\frac{16t^3}{9(k+2t)^3} - \frac{12t}{(9k+10t)^2\gamma} < 0$ ;
- (4)  $\frac{\partial W}{\partial k} = \frac{4}{9}t \left( \frac{(k-2t)t}{(k+2t)^3} - \frac{9(9k+2t)}{(9k+10t)^3\gamma} \right)$ , 容易证明在 $k > \hat{k}$ 、 $\gamma > \frac{1}{t}$ 参数范围内,方程 $\frac{\partial W}{\partial k} = 0$ 存在唯一

解 $k_W$ , 当 $\hat{k} < k < k_W$ 时,  $\frac{\partial W}{\partial k} < 0$ ; 当 $k > k_W$ 时,  $\frac{\partial W}{\partial k} > 0$ ;

其次,对创新水平,企业利润、消费者剩余和社会福利进行 $\gamma$ 的比较静态分析。可得:

- (1)  $\frac{\partial e_A}{\partial \gamma} = -\frac{9k+14t}{3(9k+10t)\gamma^2} < 0$ ;
- (2)  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial \gamma} = \frac{(9k+14t)^2}{18(9k+10t)^2\gamma^2} > 0$ ;
- (3)  $\frac{\partial CS}{\partial \gamma} = -\frac{9k+14t}{3(9k+10t)\gamma^2} < 0$ ;
- (4)  $\frac{\partial W}{\partial \gamma} = -\frac{2(9k+8t)(9k+14t)}{9(9k+10t)^2\gamma^2} < 0$ 。

最后,对创新水平,企业利润、消费者剩余和社会福利进行 $t$ 的比较静态分析。可得:

- (1)  $\frac{\partial e_A}{\partial t} = \frac{12k}{\gamma(10t+9k)^2} > 0$ ;
- (2)  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial t} = \frac{7}{18} + \frac{k^2}{9(k+2t)^2} - \frac{4k(9k+14t)}{(9k+10t)^3\gamma} > 0$ ;
- (3)  $\frac{\partial CS}{\partial t} = -\frac{37}{36} - \frac{2k^2(k+6t)}{9(k+2t)^3} + \frac{12k}{(9k+10t)^2\gamma} < 0$ ;
- (4)  $\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{4} - \frac{8k^2t}{9(k+2t)^3} + \frac{4k(9k+2t)}{(9k+10t)^3\gamma} < 0$ 。

## 附录IV 价格歧视监管政策的数学证明

### 一、政府禁止个性化定价但企业三级价格歧视的均衡证明

企业仅能三级价格歧视情形与允许个性化定价情形求解方法类似。求解最优定价同样分两步进行：首先，给定企业 $i$ 在无数据区域的统一定价 $p_i^N$ ，确定企业 $i$ 在有数据区域的统一定价 $p_i^D$ ；然后求出最优统一定价 $p_i^N$ 。具体来说，对于 $[0, \alpha]$ 范围内消费者，与个性化定价情形类似，均衡时企业A通过统一定价 $p_A^D$ 获得 $[0, \alpha]$ 范围内所有消费者<sup>①</sup>。因此，给定企业B统一定价 $p_B^N$ ，企业A可以制定的最高统一定价 $p_A^D$ 就是使最不偏好A的消费者恰好愿意购买A的产品，也就是让 $\alpha$ 位置的消费者对于以统一定价 $p_A^D$ 购买A产品和以统一定价 $p_B^N$ 购买B产品无差异：

$$V_A - p_A^D - t\alpha = V_B - p_B^N - t(1 - \alpha) \Rightarrow p_A^D = t(1 - 2\alpha) + p_B^N + \Delta。$$

同理，企业B在有数据区域制定统一定价 $p_B^D$ ，使 $(1 - \beta)$ 位置的消费者对于以统一定价 $p_A^N$ 购买A产品和以统一定价 $p_B^D$ 购买B产品无差异：

$$V_A - p_A^N - t(1 - \beta) = V_B - p_B^D - t(1 - (1 - \beta)) \Rightarrow p_B^D = t(1 - 2\beta) + p_A^N - \Delta。$$

接着，通过最大化企业在无数据区域的收入确定统一定价 $p_A^N$ 和 $p_B^N$ 。存在 $z \in (\alpha, 1 - \beta)$ 位置的消费者，对于以统一定价 $p_A^N$ 购买A的产品和以统一定价 $p_B^N$ 购买B的产品无差异：

$$V_A - p_A^N - tz = V_B - p_B^N - t(1 - z) \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{p_B^N - p_A^N + \Delta}{2t}。$$

根据 $z$ 的表达式，得到企业没有数据区域收入： $p_A^N(z - \alpha)$ 和 $p_B^N(1 - \beta - z)$ 。每个企业选择 $p_A^N$ 和 $p_B^N$ 最大化没有数据区域收入，得到均衡价格：

$$p_A^N = \frac{1}{3}(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta)，p_B^N = \frac{1}{3}(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta)。$$

代入到 $p_A^D$ 和 $p_B^D$ 表达式中可以得到：

$$p_A^D = \frac{2}{3}(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta)，p_B^D = \frac{2}{3}(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta)。$$

代入到企业收入表达式中可得：

$$R_A = \frac{(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta)(t(3 + 8\alpha - 2\beta) + \Delta)}{18t}，R_B = \frac{(t(3 - 2\alpha + 8\beta) - \Delta)(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta)}{18t}。$$

减去数据收集成本可得企业利润 $\pi_A$ 和 $\pi_B$ ：

$$\pi_A = \frac{(t(3 - 4\alpha - 2\beta) + \Delta)(t(3 + 8\alpha - 2\beta) + \Delta)}{18t} - \frac{1}{2}k\alpha^2；$$

$$\pi_B = \frac{(t(3 - 2\alpha + 8\beta) - \Delta)(t(3 - 2\alpha - 4\beta) - \Delta)}{18t} - \frac{1}{2}k\beta^2。$$

对 $\pi_A$ 求关于 $\alpha$ 的一阶导数可得： $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha} = \frac{1}{9}(-9k\alpha + t(6 - 32\alpha - 4\beta) + 2\Delta)$ ；继续求解关于 $\alpha$ 的二阶

导数可得： $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial \alpha^2} = -\frac{32t}{9} - k < 0$ ；同理， $\frac{\partial \pi_B}{\partial \beta} = \frac{1}{9}(t(6 - 4\alpha - 32\beta) - 9k\beta - 2\Delta)$ ， $\frac{\partial^2 \pi_B}{\partial \beta^2} = -\frac{32t}{9} - k <$

0。联立方程组 $\frac{\partial \pi_A}{\partial \alpha} = 0$ 和 $\frac{\partial \pi_B}{\partial \beta} = 0$ ，可得数据收集均衡结果： $\alpha = \frac{2t}{3(k+4t)} + \frac{2\Delta}{9k+28t}$ ， $\beta = \frac{2t}{3(k+4t)} - \frac{2\Delta}{9k+28t}$ 。

与引理1证明数据收集存在唯一纯策略过程类似，我们可以严格证明企业实施三级价格歧视时，企业收集数据使每个企业都在无数据区域获得部分消费者的数据收集均衡是唯一的，并且当 $k > 0$ 时，

<sup>①</sup> 如果企业A通过 $p_A^D$ 只能获得 $[0, \alpha]$ 范围内的部分消费者，那么企业A之前就不会收集全部 $[0, \alpha]$ 范围的数据；也就是说，企业最优的数据收集量，使得企业可以通过价格留住被收集数据的消费者。

在  $0 \leq \Delta < t$  范围内，没有企业会偏离均衡数据收集量。因为如果增加数据收集量，为了留住有数据区域消费者，企业需要降低对忠诚客户的价格，企业收入降低，所以即使  $k = 0$ ，企业也不会收集过多数据。但是，为了与允许个性化定价情形比较，我们在比较静态和对比分析中，采用同样参数范围，即  $k > \hat{k}$ 。

将数据收集均衡代入企业利润表达式可得：

$$\pi_A = \frac{(9k+32t)(3k(3t+\Delta)+4t(7t+3\Delta))^2}{18t(k+4t)(9k+28t)^2}; \quad \pi_B = \frac{(9k+32t)(3k(3t-\Delta)+4t(7t-3\Delta))^2}{18t(k+4t)(9k+28t)^2}。$$

进一步减去研发投入成本可得：

$$\Pi_A = \pi_A - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 = \frac{(9k+32t)(3k(3t+\Delta)+4t(7t+3\Delta))^2}{18t(k+4t)(9k+28t)^2} - \frac{1}{2}\gamma e_A^2;$$

$$\Pi_B = \pi_B - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = \frac{(9k+32t)(3k(3t-\Delta)+4t(7t-3\Delta))^2}{18t(k+4t)(9k+28t)^2} - \frac{1}{2}\gamma e_B^2。$$

对  $\Pi_A$  求  $e_A$  的一阶导数可得：  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = \frac{(9k+32t)(t(9k+28t)+3(k+4t)(e_A-e_B))}{3t(9k+28t)^2} - \gamma e_A$ ；对  $\Pi_B$  求  $e_B$  的一阶导数

可得：  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = \frac{(9k+32t)(t(9k+28t)+3(k+4t)(-e_A+e_B))}{3t(9k+28t)^2} - \gamma e_B$ 。在  $\gamma > \frac{1}{t}$  条件下，  $\frac{\partial^2 \Pi_A}{\partial e_A^2} < 0$ ，  $\frac{\partial^2 \Pi_B}{\partial e_B^2} < 0$ 。联立方程

组  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial e_A} = 0$  和  $\frac{\partial \Pi_B}{\partial e_B} = 0$  可得：  $e_A = \frac{9k+32t}{3\gamma(9k+28t)}$ ，  $e_B = \frac{9k+32t}{3\gamma(9k+28t)}$ 。  $\Delta = e_A - e_B = 0$ 。将研发均衡代入数据收

集均衡表达式可得：  $\alpha = \beta = \frac{2t}{3(k+4t)}$ ；代入价格和各方福利表达式可得：

$$\text{企业价格： } p_A^N = p_B^N = t - \frac{4t^2}{3(k+4t)}, \quad p_A^D = p_B^D = \frac{2t(3k+8t)}{3(k+4t)};$$

$$\text{企业利润： } \Pi_A = \Pi_B = \frac{1}{18}(32t+9k)\left(\frac{t}{4t+k} - \frac{32t+9k}{\gamma(28t+9k)^2}\right);$$

消费者剩余：

$$CS = \int_0^\alpha (V_A - tx - p_A^D) dx + \int_\alpha^z (V_A - tx - p_A^N) dx + \int_z^{1-\beta} (V_B - t(1-x) - p_B^N) dx + \int_{1-\beta}^1 (V_B - t(1-x) - p_B^D) dx = V_0 + \frac{1}{3\gamma} + \frac{16t^3}{9(k+4t)^2} + t\left(\frac{4}{3\gamma(9k+28t)} - \frac{5}{4}\right);$$

社会福利：

$$W = \int_0^z (V_A - tx) dx + \int_z^1 (V_B - t(1-x)) dx - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma e_A^2 - \frac{1}{2}\gamma e_B^2 = V_0 + \frac{1}{36}t\left(\frac{48(3k+8t)}{(9k+28t)^2\gamma} - 9 - \frac{16kt}{(k+4t)^2}\right) + \frac{2}{9\gamma}。$$

与允许个性化定价情形类似，我们对允许三级价格歧视的均衡结果进行  $k$  和  $\gamma$  的比较静态分析。企业 A 和 B 是对称的，因此我们以 A 为例进行证明。

首先是  $k$  的比较静态结果：

$$(1) \quad \frac{\partial e_A}{\partial k} = -\frac{12t}{\gamma(28t+9k)^2} < 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Pi_A}{\partial k} = \frac{2t^2}{9(k+4t)^2} + \frac{4t(9k+32t)}{(9k+28t)^3\gamma} > 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial CS}{\partial k} = -\frac{32t^3}{9(k+4t)^3} - \frac{12t}{(9k+28t)^2\gamma} < 0;$$

$$(4) \quad \frac{\partial W}{\partial k} = \frac{4}{9}t\left(\frac{(k-4t)t}{(k+4t)^3} - \frac{9(9k+20t)}{(9k+28t)^3\gamma}\right), \text{ 容易证明在 } k > \hat{k}, \gamma > \frac{1}{t} \text{ 参数范围内, 方程 } \frac{\partial W}{\partial k} = 0 \text{ 存在唯一}$$

解 $k'_W$ ，当 $\hat{k} < k < k'_W$ 时， $\frac{\partial W}{\partial k} < 0$ ；当 $k > k'_W$ 时， $\frac{\partial W}{\partial k} > 0$ 。其中 $k'_W(t, \gamma)$ 为等式 $t\gamma(k-2t)(9k+10t)^3 - 9(k+2t)^3(9k+2t) = 0$ 满足 $t > 0$ 、 $k > \hat{k}$ 和 $\gamma > \frac{1}{t}$ 的唯一解。

其次是 $\gamma$ 的比较静态结果：

- (1)  $\frac{\partial e_A}{\partial \gamma} = \frac{9k+32t}{3(9k+28t)\gamma^2} < 0$ ；
- (2)  $\frac{\partial \Pi_A}{\partial t} = \frac{(9k+32t)^2}{18(9k+28t)^2\gamma^2} > 0$ ；
- (3)  $\frac{\partial CS}{\partial \gamma} = -\frac{9k+32t}{3(9k+28t)\gamma^2} < 0$ ；
- (4)  $\frac{\partial W}{\partial \gamma} = -\frac{2}{9\gamma^2} \left(1 + \frac{6t(3k+8t)}{(9k+28t)^2}\right) < 0$ 。

我们发现与允许个性化定价情形结果完全一致。

## 二、命题 3 的证明

为了简化表达，我们将允许个性化定价情形上标记为 P (Personalized)，将允许三级价格歧视情形上标记为 NP (No-Personalized)。将允许三级价格歧视均衡结果与允许个性化定价均衡结果比较可得：

- (1) 数据收集量： $\alpha^{NP} < \alpha^P$ ， $\beta^{NP} < \beta^P$ ；创新水平： $e^{NP} < e^P$ ；
- (2) 企业利润： $\Pi^{NP} > \Pi^P$ ；
- (3) 消费者剩余：在 $k > \hat{k}$ 、 $\gamma > \frac{1}{t}$ 参数范围内，存在唯一临界值 $k_{CS}$ ，当 $\hat{k} < k < k_{CS}$ 时， $CS^{NP} < CS^P$ ；当 $k > k_{CS}$ ， $CS^{NP} > CS^P$ 。其中 $k_{CS}(t, \gamma)$ 为等式 $27(k+2t)^2(k+4t)^2 - t\gamma(9k+10t)(9k+28t)(k^2-8t^2) = 0$ 满足 $t > 0$ 、 $k > \hat{k}$ 和 $\gamma > \frac{1}{t}$ 的唯一解。
- (4) 社会福利：在 $k > \hat{k}$ 、 $\gamma > \frac{1}{t}$ 参数范围内，存在唯一临界值 $\gamma_W$ 和 $k''_W$ ，当 $\frac{1}{t} < \gamma < \gamma_W$ 且 $\hat{k} < k < k''_W$ 时， $W^{NP} < W^P$ ；反之， $W^{NP} > W^P$ 。其中 $k''_W(t, \gamma)$ 为等式 $2kt\gamma(k+3t)(9k+10t)^2(9k+28t)^2 - 9(k+2t)^2(k+4t)^2(81k^2+270kt+128t^2) = 0$ 满足 $t > 0$ 、 $k > \hat{k}$ 和 $\gamma > \frac{1}{t}$ 的唯一解； $\gamma_W(t)$ 为等式 $k''_W(t, \gamma) = \hat{k}(t, \gamma)$ 满足 $t > 0$ 和 $\gamma > \frac{1}{t}$ 的唯一解。

## 参考文献

- [1] Aghion, P., Bloom, N., Blundell, R., Griffith, R., and Howitt, P., 2005, “Competition and innovation: An inverted-U relationship”, *Quarterly Journal of Economics*, 120(2), 701-728.
- [2] Ali, S. N., Lewis, G., and Vasserman, S., 2023, “Voluntary Disclosure and Personalized Pricing”, *Review of Economic Studies*, 90(2), 538-571.
- [3] Arrow, K.J., 1962, “Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention”, *The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors*, Princeton: Princeton University Press, 609-626.
- [4] Belleflamme, P., and Peitz, M., 2015, “Industrial Organization: Markets and Strategies (2nd edition)”, Cambridge University Press.
- [5] Chen, Z., Choe, C., Cong, J. and Matsushima, N., 2022, “Data-Driven Mergers and Personalization”, *RAND Journal of Economics*, 53(1), 3-31.
- [6] Laussel, D., and Resende, J., 2022, “When Is Product Personalization Profit-Enhancing? A Behavior-Based Discrimination Model”, *Management Science*, 68(12), 8515-9218.

注：该附录是期刊所发表论文的组成部分，同样视为作者公开发表的内容。如研究中使用该附录中的内容，请务必在研究成果上注明附录下载出处。