广告商市场结构对搜索引擎平台声誉的影响

——基于三方重复博弈的分析

杜 创 沈 吉

目录

附录 I 模型的拓展与讨论 1
(一)内生支付意愿 1
(二)平台关于广告商质量信息的内生性/不确定性 3
(三)计分式拍卖的声誉机制 5
(四)支付意愿无上界 6
(五)平台声誉机制的福利效果讨论 7
附录 II 相关命题的数学证明 9

附录 I 模型的拓展与讨论

（一）内生支付意愿

基本模型中为分析简洁，我们假设广告商支付意愿与广告质量相互独立。现实中二者常常是相关的。在良好运转的市场中，广告质量更高（产品质量更高），产品售价通常也更高，从而广告商更有能力也更有意愿拿出利润来做广告，亦即二者正相关的。但也可能出现负相关的情况：质量更高的产品，可能在消费者中已经有了一定的口碑，可能也就缺少意愿拿出更多费用到搜索平台上做广告了；反而是质量低、缺少口碑的产品更有动力来搜索平台做广告，即存在逆向选择。

假设对于广告商 j，其支付意愿即从每次点击中可能获得的单位利润，即产品的价格与边际成本之差。在信息不对称条件下，价格与预期质量有关，边际成本则可能与实际质量相关

$$v_j = p_j(E(u_j)) - c(u_j).$$

为简单起见，假设$p_j\left(E(u_j)\right) = xE(u_j)$，其中外生参数$x \in (0,1)$代表了广告商的市场势力。这里我们抽象掉了广告商与消费者之间的议价过程。搜索者的效用函数为：

$$\mathrm{U} = (1-x)E(u) - w.$$

只有当搜索后消费的预期效用大于搜索的机会成本 w 时，搜索者才会点击该链接。即搜索者点击广告的条件是 $w < (1-x)E(u)$。

考虑质量影响固定成本的情形(影响边际成本的情形类似，但更繁琐)。例如一次性投入新的设备之后，产品质量整体上提高了。此时边际成本 $c(u_j) \equiv c_j$，其中c_j对同一个企业有相同的取值，不受产品质量和产品数量影响；但不同企业的生产效率不同，c_j有差异。由于价格仅与预期质量有关，此时可以认为在给定市场预期 $E(u_j)$ 的情况下，v_j 与u_j 是相互独立的。例如当仅有高质量广告商参与拍卖时

$$v_j = x\overline{u} - c_j.$$

当全部广告商都可以参与拍卖时，

$$v_j = xu_0 - c_j.$$

当消费者认为只有高质量广告商参与拍卖，而平台让全部广告商参与拍卖时：

$$v_j = x\overline{u} - c_j.$$

假设边际成本 $c_j \in [0,\overline{c}]$ 是广告商的私人信息，即只有广告商自己知晓；各个广告商的边际成本是独立同分布的，密度函数和分布函数分别为$h(c)$和$H(c)$，连续函数。为使问题有趣，假设$\overline{c} < u_0$。

如同基本模型，仍设$v \in [\underline{v}, \overline{v}]$的密度函数和分布函数分别为$f(v)$和$F(v)$，则$\underline{v} = xE(u_j) - \overline{c}$, $\overline{v} = xE(u_j)$,

$$F(v) = prob.(v_j \le v) = prob.(xE(u_j) - c_j \le v)$$

$$= prbo(c_j \ge xE(u_j) - v) = 1 - H(xE(u_j) - v),$$

$$f(v) = F'(v) = h(xE(u_j) - v) \ .$$

当平台实施不带质量门槛的拍卖且消费者也知道这一点时，平台来自单次点击的预期收入

$$E[P|Z_0](N) = \overline{v} - \int_{r_0}^{\overline{v}} \mathrm{F(v)}^N J'(v) d\mathrm{v}$$

$$= xu_0 - \int_{r_0}^{xu_0} [1 - H(xu_0 - v)]^N J'(v) d\mathrm{v},$$

其中$J(\mathrm{v}) \equiv v - \frac{(1-F(v))}{f(v)} = v - \frac{H(xu-v)}{h(xu-v)}$。显然当导数$J'(v) > 0$时，$E[P|Z_0](N)$是$N$的增函数且$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} E[P|Z_0](N) = xu_0$。

当平台宣称实施带最低质量标准的二级价格拍卖且如实执行时

$$E[P|Z_u] = x\overline{u} - \int_{r_u}^{x\overline{u}} [q(1 - H(x\overline{u} - v)) + 1 - q]^N J'(\mathrm{v}, \overline{u}) d\mathrm{v}$$

$$= x\overline{u} - \int_{r_u}^{x\overline{u}} [1 - qH(x\overline{u} - v)]^N J'(\mathrm{v}) d\mathrm{v}.$$

而当平台宣称实施带最低质量标准的二级价格拍卖，消费者也相信了平台；但平台偏离均衡路径，实际实施了不带最低质量标准的二级价格拍卖时，

$$E[P|Z_u, Z_0] = x\overline{u} - \int_{r_u}^{x\overline{u}} [1 - H(x\overline{u} - v)]^N J'(v) d\mathrm{v}.$$

因为在$q < 1$时总有$E[P|Z_u, Z_0] > E[P|Z_\mathrm{u}]$，因此在内生支付意愿下命题 1 仍成立，即一次性博弈条件下平台总有动机偏离宣称的规则。

重复博弈条件下，使得平台维持声誉，实际实施带最低质量要求的拍卖的激励相容条件为

$$\frac{G((1-x)\overline{u}) E[P|Z_u]}{1-\delta}$$

$$\ge G((1-x)\overline{u}) E[P|Z_u, Z_0]$$

$$+ \frac{\delta\{[1-(1-q)\gamma] G((1-x)\overline{u}) E[P|Z_u] + (1-q)\gamma G((1-x)u_0) E[P|Z_0]\}}{1-\delta}$$

与基本模型（2）式相比有两个变化，一是平台偏离的短期诱惑增加了，即右边第一项从$E[P|Z_0]$变为$E[P|Z_u, Z_0]$；二是平台维持声誉的长期利益也增加了，即$E[P|Z_u]$的上界与 u 正相关。由此可以化简为：

$$\delta \geq \frac{G((1-x)\overline{u})\{E[P|Z_u,Z_0]-E[P|Z_u]\}}{G((1-x)\overline{u})E[P|Z_u,Z_0]-[1-(1-q)\gamma]G((1-x)\overline{u})E[P|Z_u]-(1-q)\gamma G((1-x)u_0)E[P|Z_0]}$$

$$=\frac{1}{1+(1-q)\gamma\frac{\{G((1-x)\overline{u})E[P|Z_u]-G((1-x)u_0)E[P|Z_0]\}}{G((1-x)\overline{u})\{E[P|Z_u,Z_0]-E[P|Z_u]\}}}\equiv\delta_1$$

由于$\lim_{N\to\infty}E[P|Z_u]=\lim_{N\to\infty}E[P|Z_u,Z_0]=x\overline{u}$，$\lim_{N\to\infty}E[P|Z_0]=xu_0$，不难得到类似命题3（i）的结果。

命题 A1　若对广告商而言高质量增加的成本仅为固定成本，则存在$N_1>0$使得当$N>N_1$时，条件1总成立；而且 $\lim_{N\to\infty}\delta_1=0$。

（二）平台关于广告商质量信息的内生性/不确定性

基本模型假设平台能无成本、准确获知广告商质量，这是参照Gomes(2014)为分析简洁而做的技术性假设。可以放松这一假设：平台需要付出成本才能更准确（但仍不完美）获知广告商质量。

我们在基本模型中没有考虑信息甄别成本，是为了集中分析双边市场拍卖中特殊的平台道德风险问题——平台偏离承诺的原因更多是一种节省机会成本的考虑，或者说遵守承诺并不需要平台实际付出什么生产成本，而是减少短期的拍卖预期收入（由于排斥低质量广告商参加），这可看作一种机会成本。而信息甄别成本相关的道德风险更类似于经典委托代理问题。

假设平台在每期可以选择是否付出努力获知广告商的质量信息。如果不努力，则无成本，但也完全无法甄别广告商的质量信息。如果选择努力，则付出成本$\Delta\geq 0$，单可以以概率τ（$0<\tau\leq 1$）准确识别所有广告商的质量信息（仍有概率$1-\tau$ 完全无法甄别广告商的质量信息）。这个成本Δ相当于在甄别广告商质量上的投资，例如每期维护质量甄别信息系统的成本，雇佣信息甄别人员的工资成本，等等。如果不付出该成本，意味着平台将无法甄别广告商质量，实际上实施不带最低质量标准的拍卖机制Z_0。为简单，进一步假设$\gamma=1$；即当中标者为低质量时，下期搜索者一定知道该信息；其他假设与基本模型相同。后续我们将发现，τ起到了类似于γ的作用。

事后看，由于平台在选择努力时仍有$1-\tau$的可能性在技术上犯错误，这样即使平台主观上完全遵守承诺、实际实施了带最低质量标准的拍卖规则，也有可能出现低质量的中标者。然而当出现低质量中标者时，下期开始搜索者仍需给予平台一定程度的惩罚，否则事前平台就没有遵守承诺的激励。

假设均衡时搜索者采取如下形式的触发策略ρ:（i）从博弈第一期开始，相信平台实际采取了其宣称的拍卖规则Z_u；搜索成本低于$\tilde{u}$ 的搜索者点击广告；成本高于$\tilde{u}$ 的搜索者不点击。（ii）在任何一期，若上期中标者为高质量的，则继续信任平台，点击决策如（i）。若上期中标者为低质量的，则以概率$1-\rho$忽略该信号，点击决策如（i）。以概率ρ $(0<\rho\leq 1)$ 惩罚平台，即从下期开始认为平台只会采取不含任何质量标准

的拍卖规则，成本低于$\underline{u}$的搜索者点击广告；成本高于$\underline{u}$ 的搜索者不点击。[1]

我们分析消费者采取触发策略ρ，平台采取带最低质量承诺的二级价格拍卖机制 Z_u 能否构成一个完美贝叶斯均衡。均衡路径上，面对 N 个广告商，假设平台遵守承诺，且选择努力，则平台有概率τ可以识别出其中的高质量广告商，从而中标者一定是高质量的($\overline{u}$)；有概率 $1-\tau$，平台无法识别，从而错误地以为 N 个广告商都是高质量的，此时中标者的预期质量等于事前概率(u_0)。因此，均衡路径上，中标广告商的预期质量为

$$\tilde{u} = \tau\overline{u} + (1-\tau)u_0$$

设平台贴现平均的均衡收益为V，则根据 APS (Abreu et al.,1990)的自我生成公式：

$$\frac{V}{(1-\delta)} = G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u) + (1-\tau)E(P|Z_0) - \Delta]$$

$$+\frac{\delta\{[1-(1-\tau)(1-q)\rho]V + (1-\tau)(1-q)\rho G(u_0)E(P|Z_0)\}}{(1-\delta)}$$

动态激励相容条件：

$$\frac{V}{(1-\delta)} \geq G(\tilde{u})E(P|Z_0) + \frac{\delta\{[1-(1-q)\rho]V + (1-q)\rho G(u_0)E(P|Z_0)\}}{(1-\delta)}$$

由此可以得到命题 A2。

命题 A2　假设平台付出成本Δ后能以概率τ能够准确识别所有广告商的质量信息，若$G(\tilde{u})E(P|Z_u) - G(u_0)E(P|Z_0) > \frac{\Delta}{\tau}G(\tilde{u})$，则当 $\delta \geq \delta^*(\tau,\Delta)$ 时，搜索者采取触发策略ρ、广告商如实报价和平台实施带最低质量标准的二级价格拍卖机制可构成完美贝叶斯均衡，其中$\tilde{u} = \tau\overline{u} + (1-\tau)u_0$ 。[2]

证明：见附录 II。

命题 A2 中临界贴现因子

$$\delta^*(\tau,\Delta) \equiv \frac{1}{1+(1-q)\rho\left[\dfrac{G(\tilde{u})E(P|Z_u) - G(u_0)E(P|Z_0) - \frac{\Delta}{\tau}G(\tilde{u})}{G(\tilde{u})[E(P|Z_0) - E(P|Z_u)] + \frac{\Delta}{\tau}}\right]}$$

因为$\tilde{u} < \overline{u}$, $G(\tilde{u}) < G(\overline{u})$,比较基本模型命题 2 中均衡成立的条件，$G(\overline{u})E(P|Z_u) - G(u_0)E(P|Z_0) > 0$，则$G(\tilde{u})E(P|Z_u) - G(u_0)E(P|Z_0) > \frac{\Delta}{\tau}G(\tilde{u})$ 更难成立。而且当$\gamma = 1$，比较命题 2 中临界贴现因子

[1] 这里对触发策略的表述将信念揉合在了一起，以节省对完美贝叶斯均衡的描述。

[2] 在搜索者采取触发策略ρ的表述中已经包含了信念，为避免啰嗦，命题 8 没有重复写出与该完美贝叶斯均衡对应的信念。

$$\delta^* = \frac{1}{1+(1-q)\left[\frac{G(\overline{u})E(P|Z_u)-G(u_0)E(P|Z_0)}{G(\overline{u})[E(P|Z_0)-E(P|Z_u)]}\right]}$$

显然有$\delta^*(\tau,\Delta)>\delta^*$。可以发现，随着平台信息准确度降低，声誉机制更难成立了。而且不难看出，$\delta^*(\tau,\Delta)$是成本效益比 $\frac{\Delta}{\tau}$ 的增函数，即为获得给定信息甄别精确度而付出的成本越高，使得平台维持声誉的临界贴现因子就越高。

此外，搜索者以一定概率ρ 永久惩罚平台，这样的策略是否合适？因为在均衡路径上，平台将只是因为技术性错误而可能受到永久的惩罚。那事后平台和搜索者会不会再谈判？其实这里采用概率式惩罚策略只是为了表述简单，有一个等价的且抗重新谈判（Regnegotiation-proof）的策略，由 Green and Porter (1984)首先提出：搜索者看到上期中标者为低质量的，则 100%惩罚平台（即不再信任平台会执行严格的最低质量标准），但惩罚仅持续有限的 T 期，T 期之后重新恢复信任。适当选择惩罚期数 T（忽略 T 的取整限制），其效果将等价于概率ρ 惩罚。但这个策略的均衡推导更复杂一点。

（三）计分式拍卖的声誉机制

在拍卖机制中纳入质量承诺有多种形式，基本模型仅考虑了带最低质量标准的二级价格拍卖机制。现实中比较常见的另一种形式是计分式拍卖，即在综合评分中同时考虑价格、广告质量等因素。综合评分$\mathrm{s}=\mathrm{s}(\beta,u)$，其中β是报价，u 是广告质量。在此种拍卖机制下，综合评分 s 最高者获得广告位，而其实际支付 p 满足：

$$\mathrm{s}(\mathrm{p},u^{(1)})=s(\beta^{(2)},u^{(2)})$$

其中$u^{(1)}$、$u^{(2)}$分别是综合评分最高者和次高者的广告质量，$\beta^{(2)}$是综合评分次高者的报价。上述支付等式类似二级价格拍卖，即中标者的实际支付价格为在自身质量$u^{(1)}$情况下，将该支付价格代入综合评分公式得到的评分等于次高评分者即可。

参照 Gomes(2014)，假设平台采取如下线性的计分式拍卖 Z_λ：

$$\mathrm{s}=\beta+\lambda\mathrm{u}$$

其中β 是广告商报价，u 是广告商质量，$\lambda\geq 0$ 是平台赋予质量的权重。当$\lambda=0$，则等价于完全依据报价的经典二级价格拍卖Z_0。由 Gomes(2014)可知，给定平台采取上述质量计分模式Z_λ，广告商总会如实报价，即报价 $\beta=v$。由于$\mathrm{u}\in\{\underline{u},\overline{u}\}$，$\mathrm{v}\in[\underline{v},\overline{v}]$ 则当广告商如实报价且

$$\underline{v}+\lambda\overline{u}>\overline{v}+\lambda\underline{u}$$

即 $\lambda>\frac{\overline{v}-\underline{v}}{\overline{u}-\underline{u}}$时，只要存在高质量广告商，则低质量广告商完全没有中标的机会，这接近于于基本模型中带最低质量标准的二级价格拍卖Z_u。均衡λ 的大小可以代表平台对声誉的重视程度。在线性的计分式拍卖下，可

能出现一种特殊情况，即中标者为高质量广告商，按质量计分排名第二的为低质量广告商，且第二名质量计分$s^{(2)} = v^{(2)} + \lambda\underline{u} < \underline{v} + \lambda\overline{u}$，此时按规则中标者将支付$s^{(2)} - \lambda\overline{u} = v^{(2)} + \lambda\underline{u} - \lambda\overline{u} < \underline{v} + \lambda\overline{u} - \lambda\overline{u} = \underline{v}$,小于广告商最低可能的估值,甚至可能为负。利润最大化的平台总可以事先设定保留价格$\underline{v}$而避免此种情况出现，因此以下讨论线性的计分式拍卖 Z_λ 时我们都指包含了保留价格$\underline{v}$。[1]

当考虑上述线性的计分式拍卖 Z_λ，命题 1 仍然成立，即一次性博弈中任何质量承诺都不可信。因为当平台遵守承诺时，中标者的预期广告质量将高于平均水平：

$$E[u|Z_\lambda] > E[u|Z_0]$$

而中标者实际支付价格的期望值将低于经典二级价格拍卖水平：

$$E[P|Z_\lambda] < E[P|Z_0]$$

如果搜索者信任平台，即按带质量承诺机制Z_λ形成预期，并确定点击决策，则市场点击率为$G(E[u|Z_\lambda])$；给定市场点击率，平台存在违背承诺的短期诱惑，即实际采用经典的二级价格拍卖。

即使在重复博弈中，搜索者监督平台也有难度：观察到的上期广告质量 u 只是关于平台是否遵守计分式拍卖规则的一个不完美信号。因为计分式拍卖Z_λ中平台规则 $\mathrm{s} = \beta + \lambda\mathrm{u}$，搜索者需要监督平台是否按这个规则排序，但搜索者只能观察到以前各期的质量 u，观察不到广告商的报价β， 进而无法观察到 s 和λ。因此当中标者为低质量时，平台可以事后辩解说并没有偏离承诺的拍卖规则，只是运气不好，高质量广告商的报价过低或恰巧没有高质量广告商，导致低质量广告商中标。当然，平均来说，在平台遵循规则的情况下，高质量广告商更可能中标。消费者可以基于这一统计规律来约束平台行为。一定条件下计分式拍卖机制也可以构成完美贝叶斯均衡，即平台如实执行计分式拍卖机制 $\mathrm{s} = \beta + \lambda\mathrm{u}$。这也可视为声誉机制的另一种形式。而且 N 越大，计分式拍卖声誉机制下均衡的λ越高，即平台越重视质量。

（四）支付意愿无上界

在基本模型中，我们假设支付意愿上限为有限的值：$\overline{v} < +\infty$；命题 3 的证明也严格依赖于该性质。本小节我们将证明该假设并非必要条件，命题 3 的极限性质结论具有稳健性。具体来说，本小节我们假设支付意愿 v 为 $[0, +\infty)$ 区间、参数为 μ 的指数分布，即

$$F(v) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu v} & if\ \ v \geq 0 \\ 0 & if\ v < 0 \end{cases}$$

[1] 严格来说，在线性的计分式拍卖下还可以讨论中标所需的保留计分（最低计分）s。不过最低计分 s 如果同时涉及报价与质量，则又涉及承诺的可信性问题，因此本不部分不单独讨论保留计分。

$$f(v)=\begin{cases}\mu e^{-\mu v} & if\ \ v\ge 0\\ 0 & if\ v<0\end{cases}$$

由此可知当$v\ge 0$时，$\frac{1-F(v)}{f(v)}=\frac{1}{\mu}$为常数，$J(v)\equiv v-\frac{1-F(v)}{f(v)}=v-\frac{1}{\mu}$；且此时最优保留价格满足$J(r)=r-\frac{1-F(r)}{f(r)}=0$，从而$r=\frac{1}{\mu}$。结合命题3可知，我们选取的两个具体的分布函数——指数分布和均匀分布——分别使得$\frac{1-F(v)}{f(v)}$具有最简单的表达式，即常数或v的线性函数，因此是我们可以找到显式解的最简单形式。下述命题表明命题3不依赖于支付意愿上限为有限值的假设。

命题A3 假设支付意愿$\boldsymbol{v}$为$[\mathbf{0},+\infty)$区间的指数分布，则基本模型中使得平台维持声誉的临界贴现因子$\boldsymbol{\delta}^*$满足当$\mathbf{N}\to\infty$时$\boldsymbol{\delta}^*\to\mathbf{0}$。

证明：见附录II。

（五）平台声誉机制的福利效果讨论

考虑基本模型，则在任何一期，社会总福利来自两部分：一是搜索者点击广告的效用(扣除搜索成本)，二是广告位分配给某个广告商带来的净值。平台利润来自对广告商的收费，只是一笔转移支付，在计算社会总福利时可以不直接计算。

对任一广告商i，支付意愿v_i和质量u_i，若将广告位给予该广告商，则搜索流量为$G(u_i)$，广告商和平台总计可以获得$v_iG(u_i)$。假设1单位搜索者，搜索成本为w，则其期望效用：

$$E(u_i-w)=\int_0^{u_i}(u_i-w)g(w)dw$$

因此按社会福利最大化分配广告位，应该将其分配给满足下式的广告商

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} v_iG(u_i)+E(u_i-w)$$

社会最优的广告位分配原则应类似于质量计分模式，计分公式为$s(v,u)=vG(u)+E(u-w)$。然而其实施的困难在于平台、广告商和搜索者之间的信息不对称。这里可以通过一个极端的例子予以说明：假设某期的实际情况是N个广告商均为低质量的，这时按照社会最优的分配原则应该执行经典二级价格拍卖，由报价最高的广告商获得广告位。而按照带最低质量标准的二级价格拍卖（Z_u），当期没有广告商符合质量标准，广告位空缺一次。这种空缺从事后看是不符合效率要求的，然而在信息不对称条件下却往往是为激励平台维持声誉所必须的。否则，平台总有动机背离带最低质量标准的二级价格拍卖（Z_u），只看报价，并欺骗消费者说当期没有高质量广告商。线性的计分式拍卖规则一定程度上可以解决这个问题，使得在某期只有低质量广告商时广告位也不会空缺。但线性计分式拍卖规则引致的不完美监督重复博弈，在均衡路径上会以一定概率存在惩罚；而且均衡要求的贴现因子更高，并不一定总能被满足。

附录 II 相关命题的数学证明

引理 1 的证明：

当平台严格执行质量标准，且准备提交报价的广告商有 N 个时，可能出现(N+1)种情况：

(0) 没有广告商是高质量的，对应概率为 $(1-q)^N$；

(1) 只有 1 个广告商是高质量的，对应概率为 $N(1-q)^{N-1}\mathrm{q}$；

…

(m)只有 m 个广告商是高质量的，对应概率为 $C_N^m q^m[1-q]^{N-m}$，其中$C_N^m=\frac{N!}{M!(N-M)!}$ ；

…

(n) N 个广告商都是高质量的，对应概率为 q^N。

从而中标者支付价格的期望值 $E[P|Z_u]=\sum_{m=1}^N\{E[P|Z_0](m)C_N^m q^m(1-q)^{N-m}\}$。其中 $E[P|Z_0](m)$即当允许 m 家高质量广告商进入，进入后则完全按经典二级价格拍卖规则拍卖时平台的事前预期收益。而由拍卖基本理论已知

$$E[P_0|Z_0](m)=\mathrm{m}\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}J(v)\mathrm{F}(\mathrm{v})^{m-1}f(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

其中$J(\mathrm{v})\equiv v-\frac{(1-F(v))}{f(v)}$。从而

$$\begin{aligned}E[P|Z_u]&=\sum_{m=1}^N\left\{\left[\mathrm{m}\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}J(v)\mathrm{F}(\mathrm{v})^{m-1}f(\mathrm{v})d\mathrm{v}\right]C_N^m q^m(1-q)^{N-m}\right\}\\&=\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}J(v)\sum_{m=1}^N[mC_N^m q^m(1-q)^{N-m}\mathrm{F}(\mathrm{v})^{m-1}]\,f(\mathrm{v})d\mathrm{v}\end{aligned}$$

首先计算中括号内的项

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^N[mC_N^m q^m(1-q)^{N-m}\mathrm{F}(\mathrm{v})^{m-1}]&=\sum_{m=1}^N\left[m\frac{N!}{m!\,(N-m)!}q^m(1-q)^{N-m}\mathrm{F}(\mathrm{v})^{m-1}\right]\\&=\sum_{m=1}^N\left[\frac{N!}{(m-1)!\,(N-m)!}q^m(1-q)^{N-m}\mathrm{F}(\mathrm{v})^{m-1}\right]\\&=qN\sum_{m=1}^N\left[\frac{(N-1)!}{(m-1)!\,((N-1)-(m-1))!}(qF(v))^{m-1}(1-q)^{N-m}\right]\\&=qN\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{(N-1)!}{k!\,((N-1)-k)!}(qF(v))^k(1-q)^{N-1-k}\right]\end{aligned}$$

$$= qN[qF(v)+1-q]^{N-1}$$

上述推导中重新标记 $k=m-1$，最后一步使用了牛顿二项式展开公式。由此得到

$$E[P|Z_u]=\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} J(v)qN[qF(v)+1-q]^{N-1}f(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

应该设置最优保留价格使得$J(v)\geq 0$，因此

$$E[P|Z_u]=\int_{r_u}^{\overline{v}} J(v)qN[qF(v)+1-q]^{N-1}f(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

其中最优保留价格 r_u 满足$J(r_u)\equiv r_u-\frac{(1-F(r_u))}{f(r_u)}=0$。

$$E[P|Z_u]=\int_{r_u}^{\overline{v}} J(v)d[qF(v)+1-q]^N$$

$$=J(v)[qF(v)+1-q]^N|_{v=r}^{v=\overline{v}}-\int_{r_u}^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^N dJ(v)$$

$$=\overline{v}-\int_{r_u}^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^N J'(v)d(v)$$

显然当$J'(\mathrm{v})>0$时 $E[P|Z_u](N)$随 N 增加而增加，且 $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} E[P|Z_u](N)=\overline{v}$。证毕。

命题 3 的证明：

（i）由正文已知

$$\delta^*\equiv\frac{1}{1+\gamma(1-q)\dfrac{G(\overline{u})E[P|Z_u]-G(u_0)E[P|Z_0]}{G(\overline{u})\{E[P|Z_0]-E[P|Z_\mathrm{u}]\}}}$$
$$=\frac{1}{1+\gamma(1-q)\dfrac{1-\dfrac{G(u_0)}{G(\overline{u})}\dfrac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}}{\dfrac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}-1}}$$

在δ^*的表达式中，只有$\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}$中包含 N，而且显然$\delta^*$是$\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}$的增函数，因此关键是推导$\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}$如何随 N 变化。根据引理 1，可令$r_u=r_0\equiv r$，且 $E[P|Z_u]=\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}$， $E[P|Z_0]=\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}F(v)^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}$，其中$J(v)=v-\frac{1-F(v)}{f(v)}$。

$$\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}=\frac{\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}F(v)^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}}{\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}}$$

显然

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}\to 1$$

从而$\delta^*\to 0$，而且存在N^*使得当$N\geq N^*$时，条件 1 总成立。

（ii）要证 $\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}$ 是 N 的严格减函数。若 v 是[0,1]上的均匀分布，$F(v)=v$，$f(v)=1$，$J(v)=2v-1$，且由（i）最优保留价格 $r=\frac{1}{2}$，

$$E[P|Z_0]=\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}F(v)^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}=1-\int_{0.5}^{1}2v^N d\mathrm{v}=\frac{N-1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\frac{1}{2^N}$$

$$E[P|Z_u]=\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^N J'(v)d\mathrm{v}=1-\int_{0.5}^{1}2[qv+1-q]^N d\mathrm{v}$$

$$=\frac{1}{N+1}\left[N+1-\frac{2}{q}+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}\right]$$

$$\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}=\frac{N-1+0.5^N}{N+1-\frac{2}{q}+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}}$$

令

$$I(q,N)=N+1-\frac{2}{q}+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}$$

则

$$\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}=\frac{I(1,N)}{I(q,N)}$$

进而

$$sign\left\{\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}\right)\right\}=sign\left\{\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{I(1,N)}{I(q,N)}\right)\right\}=sign\left\{\frac{\partial}{\partial N}\Big(\ln\big(I(1,N)\big)-\ln\big(I(q,N)\big)\Big)\right\}$$

注意到

$$\ln\big(I(1,N)\big)-\ln\,(I(q,N)=\int_{\hat{q}=q}^{\hat{q}=1}\frac{\partial\ln\,(I(\hat{q},N))}{\partial\hat{q}}d\hat{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big(\ln\big(I(1,N)\big)-\ln\big(I(q,N)\big)\Big)=\frac{\partial}{\partial N}\left(\int_{\hat{q}=q}^{\hat{q}=1}\frac{\partial\ln\,(I(\hat{q},N))}{\partial\hat{q}}d\hat{q}\right)$$

$$=\int_{\hat{q}=q}^{\hat{q}=1}\frac{\partial^2\ln\,(I(\hat{q},N))}{\partial\hat{q}\partial N}d\hat{q}$$

因此

$$sign\left\{\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}\right)\right\}=sign\left\{\int_{\hat{q}=q}^{\hat{q}=1}\frac{\partial^2\ln\,(I(\hat{q},N))}{\partial\hat{q}\partial N}d\hat{q}\right\}$$

这里

$$\frac{\partial^2 \ln\,(I(\hat{q},N))}{\partial\hat{q}\partial N}=\frac{\partial}{\partial\hat{q}}\left(\frac{1}{I(\hat{q},N)}\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial N}\right)=\frac{1}{I(\hat{q},N)^2}\left[I(\hat{q},N)\frac{\partial^2 I(\hat{q},N)}{\partial N\partial\hat{q}}-\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial N}\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial\hat{q}}\right]$$

而由定义

$$I(q,N)=N+1-\frac{2}{q}+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}$$

因此

$$\frac{\partial I(q,N)}{\partial N}=1+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}\ln\,(1-0.5q)$$

$$\frac{\partial I(q,N)}{\partial q}=\frac{2}{q^2}-\frac{2}{q^2}(1-0.5q)^{N+1}-\frac{N+1}{q}(1-0.5q)^{N}$$

$$\frac{\partial^2 I(q,N)}{\partial N\partial q}=-\frac{1}{q}(1-0.5q)^{N}\left[(N+\frac{2}{q})\ln(1-0.5q)+1\right]$$

由此可得

$$I(\hat{q},N)\frac{\partial^2 I(\hat{q},N)}{\partial N\partial\hat{q}}-\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial N}\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial\hat{q}}$$

$$=\left[N+1-\frac{2}{q}+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}\right]\left\{-\frac{1}{q}(1-0.5q)^{N}\left[(N+\frac{2}{q})\ln(1-0.5q)+1\right]\right\}$$

$$-\left\{1+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}\ln\,(1-0.5q)\right\}\left\{\frac{2}{q^2}-\frac{2}{q^2}(1-0.5q)^{N+1}-\frac{N+1}{q}(1-0.5q)^{N}\right\}$$

从而

$$\left\{I(\hat{q},N)\frac{\partial^2 I(\hat{q},N)}{\partial N\partial\hat{q}}-\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial N}\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial\hat{q}}\right\}\frac{q}{(1-0.5q)^{N}}$$

$$=-\left[N+1-\frac{2}{q}+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}\right]\left[(N+\frac{2}{q})\ln(1-0.5q)+1\right]$$

$$-\left\{1+\frac{2}{q}(1-0.5q)^{N+1}\ln\,(1-0.5q)\right\}\left\{\frac{2}{q(1-0.5q)^{N}}-\frac{2}{q}(1-0.5q)-(N+1)\right\}$$

$$=-N(N+1)\ln(1-0.5q)+\frac{2}{q}[1-(1-0.5q)^{N+1}]+\left(\frac{2}{q}-1\right)-\frac{2}{q(1-0.5q)^{N}}$$

下面证明 $I(\hat{q},N)\frac{\partial^2 I(\hat{q},N)}{\partial N\partial\hat{q}}-\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial N}\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial\hat{q}}<0$，这等价于证明对$q\in(0,1]$，

$$g(q)\equiv-N(N+1)q\ln(1-0.5q)+2\left[2-(1-0.5q)^{N+1}-\frac{1}{(1-0.5q)^{N}}\right]-q<0$$

首先注意到 $g(0)=0$。

$g(q)$ 的一阶导数：

$$g'(q)=-N(N+1)\ln(1-0.5q)+\frac{N(N+1)q}{2(1-0.5q)}+\left[(N+1)(1-0.5q)^N-\frac{N}{(1-0.5q)^{N+1}}\right]-1$$

因此 $g'(0)=0$。 二阶导数

$$g''(q)=\frac{N(N+1)}{2}\left\{\frac{(2-0.5q)}{(1-0.5q)^2}-(1-0.5q)^{N-1}-\frac{1}{(1-0.5q)^{N+2}}\right\}$$

$g''(0)=0$. 下面我们进一步证明

$$\begin{aligned} g''(q)<0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{(2-0.5q)}{(1-0.5q)^2}-(1-0.5q)^{N-1}-\frac{1}{(1-0.5q)^{N+2}}<0 \\ &\Leftrightarrow\; (2-0.5q)(1-0.5q)^N-(1-0.5q)^{2N+1}-1<0 \\ &\Leftrightarrow\; (1-0.5q)^N+(1-0.5q)^{N+1}-(1-0.5q)^{2N+1}-1<0 \\ &\Leftrightarrow\; [(1-0.5q)^N-1][1-(1-0.5q)^{N+1}]<0 \end{aligned}$$

由于 $q\in(0,1]$，最后一个不等式是显然的。因此$g'(q)$ 随 q 严格递减，进而 $g'(q)<g'(0)=0$。 这也意味着 $g(q)$ 严格递减，从而对$q\in(0,1]$，$g(q)<g(0)=0$。这样我们就证明了$I(\hat{q},N)\frac{\partial^2 I(\hat{q},N)}{\partial N\partial\hat{q}}-\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial N}\frac{\partial I(\hat{q},N)}{\partial\hat{q}}<0$。证毕。

命题 4 的证明：

由正文中已知，临界贴现因子：

$$\boldsymbol{\delta}^*\equiv\frac{1}{1+\gamma(1-q)\dfrac{G(\overline{u})E[P|Z_u]-G(u_0)E[P|Z_0]}{G(\overline{u})\{E[P|Z_0]-E[P|Z_{\mathrm{u}}]\}}}$$

其中 $E[P|Z_u]=\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}$，相应的 $E[P|Z_0]=\overline{v}-\int_r^{\overline{v}}F(v)^N J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}$。 当 $\mathrm{q}\to 0$ 时，$E[P|Z_u]\to 0$，此时条件 1 显然不成立。将$E[P|Z_u]$ 看做 q 的函数，则其偏导数

$$\frac{\partial E[P|Z_{\mathrm{u}}]}{\partial q}=\mathrm{N}\int_r^{\overline{v}}[qF(v)+1-q]^{N-1}(1-F(v))J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}$$

当$\mathrm{q}\to 1$ 时，

$$\frac{\partial E[P|Z_{\mathrm{u}}]}{\partial q}\to \mathrm{N}\int_r^{\overline{v}}F(v)^{N-1}(1-F(v))J'(\mathrm{v})d\mathrm{v}>0$$

令

$$\beta(q) \equiv \frac{(1-q)\left[G(\overline{u})E[P|Z_u] - G(u_0)E[P|Z_0]\right]}{G(\overline{u})\{E[P|Z_0] - E[P|Z_\mathrm{u}]\}}$$

则根据洛必达法则,

$$\lim_{\mathrm{q}\to 1}\beta(q)$$

$$= \lim_{\mathrm{q}\to 1}\frac{-\left[G(\overline{u})E[P|Z_u] - G(u_0)E[P|Z_0]\right] + (1-q)\left[G(\overline{u})\frac{\partial E[P|Z_\mathrm{u}]}{\partial q} - g(u_0)E[P|Z_0]\left(\overline{u} - \underline{u}\right)\right]}{-G(\overline{u})\frac{\partial E[P|Z_\mathrm{u}]}{\partial q}}$$

$$= 0$$

从而 $\lim_{\mathrm{q}\to 1}\boldsymbol{\delta}^* = \lim_{\mathrm{q}\to 1}\frac{1}{1+\gamma\beta(q)} = 1$。证毕。

命题 A2 的证明:

根据自我生成公式

$$V = (1-\delta)G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u) + (1-\tau)E(P|Z_0) - \Delta]$$
$$+ \delta\{[1-(1-\tau)(1-q)\rho]V + (1-\tau)(1-q)\rho G(u_0)E(P|Z_0)\}$$

化简可得:

$$V = \frac{(1-\delta)G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u) + (1-\tau)E(P|Z_0) - \Delta] + \delta(1-\tau)(1-q)\rho G(u_0)E(P|Z_0)}{1-\delta[1-(1-\tau)(1-q)\rho]}$$

从而

$$V - G(u_0)E(P|Z_0) = \frac{(1-\delta)\{G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u) + (1-\tau)E(P|Z_0) - \Delta] - G(u_0)E(P|Z_0)\}}{1-\delta[1-(1-\tau)(1-q)\rho]}$$

而结合自我生成公式与动态激励相容条件的右边可知:

$$\delta\tau(1-q)\rho[V - G(u_0)E(P|Z_0)] \geq (1-\delta)G(\tilde{u})\{\tau[E(P|Z_0) - E(P|Z_u)] + \Delta\}$$

即

$$V - G(u_0)E(P|Z_0) \geq \frac{(1-\delta)G(\tilde{u})}{\delta(1-q)\rho}\left[E(P|Z_0) - E(P|Z_u) + \frac{\Delta}{\tau}\right]$$

从而

$$\frac{(1-\delta)\{G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u) + (1-\tau)E(P|Z_0) - \Delta] - G(u_0)E(P|Z_0)\}}{1-\delta[1-(1-\tau)(1-q)\rho]} \geq \frac{(1-\delta)G(\tilde{u})}{\delta(1-q)\rho}\left[E(P|Z_0) - E(P|Z_u) + \frac{\Delta}{\tau}\right]$$

即

$$\delta(1-q)\rho\{G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u)+(1-\tau)E(P|Z_0)-\Delta]-G(u_0)E(P|Z_0)\}$$

$$\geq\{1-\delta[1-(1-\tau)(1-q)\rho]\}G(\tilde{u})\left[E(P|Z_0)-E(P|Z_u)+\frac{\Delta}{\tau}\right]$$

化简为

$$\delta\geq\frac{G(\tilde{u})\left[E(P|Z_0)-E(P|Z_u)+\frac{\Delta}{\tau}\right]}{G(\tilde{u})\left[E(P|Z_0)-E(P|Z_u)+\frac{\Delta}{\tau}\right]+(1-q)\rho\{G(\tilde{u})[\tau E(P|Z_u)+(1-\tau)E(P|Z_0)-\Delta]-G(u_0)E(P|Z_0)\}-(1-\tau)(1-q)\rho G(\tilde{u})\left[E(P|Z_0)-E(P|Z_u)+\frac{\Delta}{\tau}\right]}$$

$$=\frac{1}{1+(1-q)\rho\left[\dfrac{G(\tilde{u})E(P|Z_u)-G(u_0)E(P|Z_0)-\frac{\Delta}{\tau}G(\tilde{u})}{G(\tilde{u})[E(P|Z_0)-E(P|Z_u)]+\frac{\Delta}{\tau}}\right]}\equiv\delta^*(\tau,\Delta)$$

上式成立的必要条件

$$G(\tilde{u})E(P|Z_u)-G(u_0)E(P|Z_0)>\frac{\Delta}{\tau}G(\tilde{u})$$

证毕。

命题 A3 的证明：

当v为指数分布，$J(v)=v-\frac{1}{\mu}$,

$$E[P|Z_u]=qN\int_r^{\infty}J(v)[qF(v)+1-q]^{N-1}f(v)d\mathrm{v}$$

$$=qN\int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty}\left(v-\frac{1}{\mu}\right)[1-qe^{-\mu v}]^{N-1}\mu e^{-\mu v}d\mathrm{v}$$

以下证明将分为几个步骤。

（i）首先证明一个引理：当v是参数为μ的指数分布，

$$\boldsymbol{E[P|Z_u]}=\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{N}\frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}$$

其中e为自然对数的底。

证明：作变量替换，令 $y=1-qe^{-\mu v}$，则$v=\frac{lnq}{\mu}-\frac{1}{\mu}\ln(1-y)$，$d\mathrm{v}=\frac{1}{\mu}\frac{dy}{1-y}$，

$$E[P|Z_u]=\frac{N}{\mu}\int_{1-\frac{q}{e}}^{1}(lnq-1-\ln(1-y))y^{N-1}dy$$

$$=\frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^N}{\mu}ln\left(\frac{q}{e}\right)-\frac{N}{\mu}\int_{1-\frac{q}{e}}^{1}\ln(1-y)y^{N-1}dy$$

其中

$$\int \ln(1-y)\,y^{N-1}dy = \frac{1}{N}\int \ln(1-y)\,dy^N = \frac{\ln(1-y)\,y^N}{N} - \frac{1}{N}\int \frac{y^N}{y-1}dy$$

$$= \frac{\ln(1-y)\,y^N}{N} - \frac{1}{N}\int \frac{y^N-1}{y-1}dy - \frac{1}{N}\int \frac{1}{y-1}dy$$

$$= \frac{\ln(1-y)\,y^N}{N} - \frac{1}{N}\int \left(\sum_{k=1}^{N} y^{k-1}\right)dy - \frac{1}{N}ln(1-y)$$

$$= -\frac{\ln(1-y)\,(1-y^N)}{N} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}y^k$$

从而

$$E[P|Z_u] = \frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^N}{\mu}ln\left(\frac{q}{e}\right) - \frac{N}{\mu}\int_{1-\frac{q}{e}}^{1}\ln(1-y)y^{N-1}dy$$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^N}{\mu}ln\left(\frac{q}{e}\right) + \frac{1}{\mu}\left[(1-y^N)\ln(1-y) + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}y^k\right]\Big|_{y=1-\frac{q}{e}}^{y=1}$$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^N}{\mu}ln\left(\frac{q}{e}\right) + \frac{1}{\mu}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right] - \frac{1}{\mu}\left[\left(1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^N\right)\ln\left(\frac{q}{e}\right) + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\left(1-\frac{q}{e}\right)^k\right]$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}\right]$$

其中倒数第二步用到了

$$\lim_{y\to 1}(1-y^N)\ln(1-y) = \lim_{y\to 1}\frac{\ln(1-y)}{\frac{1}{(1-y^N)}} = \lim_{y\to 1}\frac{-\frac{1}{1-y}}{\frac{-Ny^{N-1}}{(1-y^N)^2}} = \lim_{y\to 1}\frac{(1-y^N)}{Ny^{N-1}}\frac{(1-y^N)}{(1-y)}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(1-y^N)}{Ny^{N-1}}(1+y+\cdots+y^{N-1})$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(1-y^N)}{N}N = \lim_{y\to 1}(1-y^N) = 0$$

（ii）根据（i）立即可得 $E[P|Z_0] = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{N}\frac{1-\left(1-\frac{1}{e}\right)^k}{k}$,

$$E[P|Z_u] = \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{N}\frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k} = \frac{1}{\mu}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}\right]$$

其中第一项$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ 是调和级数，当$\mathrm{N}\to+\infty$ 时发散的；第二项级数$\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}$ 则存在极限，因其正好是一个函数在 0 点附近的泰勒展开式：

$$-ln(1-y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{y^k}{k}\quad for\ y\in(0,1)$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}=-ln\left(\frac{q}{e}\right)$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1-\left(1-\frac{1}{e}\right)^k}{k}\right]}{\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1-\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}\right]}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{1}{e}\right)^k}{k}}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{1}{e}\right)^k}{k}\right]/\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right]}{1-\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-\frac{q}{e}\right)^k}{k}\right]/\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right]}=1$$

进而

$$\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{\delta}^*=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1+\gamma(1-q)\frac{G(\overline{u})-\frac{G(u_0)E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}}{G(\overline{u})\left\{\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}-1\right\}}}$$

$$=\frac{1}{1+\gamma(1-q)\frac{G(\overline{u})-G(u_0)\lim_{N\to\infty}\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}}{G(\overline{u})\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{E[P|Z_0]}{E[P|Z_u]}-1\right\}}}=0$$

证毕。

注：该附录是期刊所发表论文的组成部分，同样视为作者公开发表的内容。如研究中使用该附录中的内容，请务必在研究成果上注明附录下载出处。