

工具变量法最新理论发展与应用展望

王也 李海风 杨汝岱 易君健

附录 I

（一）局部工具变量法的相关公式推导过程

给定 X 和 $p(Z)$ 时，样本总体的期望结果为：

$$\begin{aligned} E(y|P(Z) = p, X = x) &= (1 - p)E(y^0|X = x, U_D > p) + pE(y^1|X = x, U_D \leq p) \\ &= (1 - p)[\mu^0(x) + E(U^0|X = x, U_D > p)] + p[\mu^1(x) + E(U^1|X = x, U_D \leq p)] \\ &= \mu^0(x) + p[\mu^1(x) - \mu^0(x)] + pE(U^1 - U^0|X = x, U_D \leq p)^1, \end{aligned}$$

则：

$$\frac{\partial E(y|P(Z)=p, X=x)}{\partial p} = \mu^1(x) - \mu^0(x) + E(U^1 - U^0|X = x, U_D = p) = MTE(x, p)。$$

（二）分离估计法的相关公式推导过程

给定 X 和 $p(Z)$ 时，接受处理和不接受处理的样本的期望结果分别为：

$$E(y^0|P(Z) = p, X = x, U_D > p) = \mu^0(x) + E(U^0|X = x, U_D > p), \quad (A1)$$

$$E(y^1|P(Z) = p, X = x, U_D \leq p) = \mu^1(x) + E(U^1|X = x, U_D \leq p)。 \quad (A2)$$

结合假设 $E(U^0|X) = 0$ 可以得到 $pE(U^0|X = x, U_D \leq p) = -(1 - p)E(U^0|X = x, U_D > p)^2$ ，求等式两边关于 p 的导数，可以得到：

$$E(U^0|X = x, U_D = p) = -(1 - p) \frac{\partial E(U^0|X=x, U_D>p)}{\partial p} + E(U^0|X = x, U_D > p)。$$

将式（A1）代入上式，得到：

¹ 这一步是由于 $E(U^0|X = x) = (1 - p)E(U^0|X = x, U_D > p) + pE(U^0|X = x, U_D \leq p) = 0$ ，即 $E(U^0|X = x, U_D > p) = \frac{p}{p-1}E(U^0|X = x, U_D \leq p)。$

² 这一步也是由于 $E(U^0|X = x) = (1 - p)E(U^0|X = x, U_D > p) + pE(U^0|X = x, U_D \leq p) = 0。$

$$E(U^0|X = x, U_D = p) = -(1-p) \frac{\partial E(y^0|P(Z)=p, X=x, U_D > p)}{\partial p} + E(y^0|P(Z) = p, X = x, U_D > p) - \mu^0(x)。 \quad (A3)$$

由于 $\int_0^p E(U^1|X = x, U_D = v)dv = pE(U^1|X = x, U_D \leq p)$ ，求等式两边关于 p 的导数，可以得到：

$$E(U^1|X = x, U_D = p) = p \frac{\partial E(U^1|X=x, U_D \leq p)}{\partial p} + E(U^1|X = x, U_D \leq p)。$$

将式 (A2) 代入上式，得到：

$$E(U^1|X = x, U_D = p) = p \frac{\partial E(y^1|P(Z)=p, X=x, U_D \leq p)}{\partial p} + E(y^1|P(Z) = p, X = x, U_D \leq p) - \mu^1(x)。 \quad (A4)$$

将式 (A3) 和式 (A4) 代入 $MTE(x, p)$ 的表达式，可以得到：

$$\begin{aligned} MTE(x, p) &= \mu^1(x) - \mu^0(x) + E(U^1|X = x, U_D = p) - E(U^0|X = x, U_D = p) \\ &= p \frac{\partial E(y^1|P(Z) = p, X = x, U_D \leq p)}{\partial p} + E(y^1|P(Z) = p, X = x, U_D \leq p) \\ &\quad + (1-p) \frac{\partial E(y^0|P(Z) = p, X = x, U_D > p)}{\partial p} - E(y^0|P(Z) = p, X = x, U_D > p)。 \end{aligned}$$

(三) 变动 (shift) 外生法中估计量一致性的具体证明

$$\begin{aligned} plim L^{-1} \sum_l B_l \epsilon_l^\perp &= plim L^{-1} \sum_k g_k \bar{\epsilon}_k^\perp = plim (N/L) N^{-1} \sum_k g_k \bar{\epsilon}_k^\perp \\ &= (N/L) E(N^{-1} \sum_k g_k \bar{\epsilon}_k^\perp) = L^{-1} \sum_k E(g_k \bar{\epsilon}_k^\perp) \\ &= L^{-1} \sum_k EE(g_k \bar{\epsilon}_k^\perp | z_{lk}, \epsilon_l) = L^{-1} \mu E(\sum_k \bar{\epsilon}_k^\perp) \\ &= L^{-1} \mu E(\sum_l (\sum_k z_{lk}) \epsilon_l^\perp) = L^{-1} \mu E(\sum_l \epsilon_l^\perp) = 0。 \end{aligned}$$