双边市场排他性协议研究

——基于非对称平台竞争的经济学分析

谢丹夏 杨补园 李 尧 熊鸿儒

（一）引理 1 的证明

证明：考虑到假设 1 和前文参数范围 $0<\beta<1$，$a>0$ 和 $v_s>0$，再结合式(5)—(13)以及 $0<N_b^1<1$，$0<n_s^1<1$，$0<n_s^2<1$，$0<n_s^{12}<1$，$\pi_1>0$ 和 $\pi_2>0$，易得引理 1。

证毕。

（二）引理 2 的证明

证明：考虑到假设 1 和前文参数范围 $0<\beta<1$，$a>0$ 和 $v_s>0$，再结合式(18)—(23)以及 $0<\widetilde{N}_b^1<1$，$0<\widetilde{N}_s^1<1$，$\widetilde{\pi}_1>0$ 和 $\widetilde{\pi}_2>0$，易得引理 2。

证毕。

（三）引理 3 的证明

证明：取引理 1 和引理 2 中存在性条件的交集，易得引理 3。证毕。

（四）定理 1 的证明

证明：结合引理 3 中的参数空间以及 $\Delta\pi_1$ 和 $\Delta\pi_2$ 的表达式，易得定理 1。证毕。

（五）定理 2 的证明

证明：结合式（1）、（3）、（14）、（16）和定理 1 中（2）的情形下的参数空间，易得

$$\widetilde{P}_s^1-P_s^1=\frac{1}{4}\left(1-2v_s-\beta+\frac{2a}{5+\beta}-\frac{4a}{7+2\beta}\right)<0,$$

$$\widetilde{P}_b^1-P_b^1=\frac{2a(2+\beta)+\beta(2v_s+\beta-1)(35+17\beta+2\beta^2)}{4(5+\beta)(7+2\beta)}>0.$$

同理，结合式（2）、（4）、（15）和（17），整理得到

$$\widetilde{P}_s^2-P_s^2=\frac{1}{4}\left(1-2v_s-\beta-\frac{2a}{5+\beta}+\frac{4a}{7+2\beta}\right),$$

$$\widetilde{P}_b^2-P_b^2=\frac{\beta(2v_s+\beta-1)(35+17\beta+2\beta^2)-2a(2+\beta)}{4(5+\beta)(7+2\beta)}.$$

再结合定理 1 中（2）的情形下的参数空间，即得到：

（1）当 $a<\frac{1}{6}(5+\beta)(-1+2v_s+\beta)(7+2\beta)$ 时，有 $\widetilde{P}_s^2-P_s^2<0$；

（2）当 $a>\frac{1}{6}(5+\beta)(-1+2v_s+\beta)(7+2\beta)$ 时，有 $\widetilde{P}_s^2-P_s^2>0$；

（3）当 $a<\frac{\beta(-1+2v_s+\beta)(35+17\beta+2\beta^2)}{2(2+\beta)}$ 时，有 $\widetilde{P}_b^2-P_b^2>0$；

（4）当 $a>\frac{\beta(-1+2v_s+\beta)(35+17\beta+2\beta^2)}{2(2+\beta)}$ 时，有 $\widetilde{P}_b^2-P_b^2<0$。

证毕。

（六）定理 3 的证明

证明：结合式（5）—（8）和式（18）—（21），整理得到

$$\widetilde{N}_b^1-N_b^1=\frac{a}{70+34\beta+4\beta^2},$$

$$\widetilde{N}_s^1-N_s^1=\frac{2a(3+\beta)-(2v_s+\beta-1)(35+17\beta+2\beta^2)}{4(5+\beta)(7+2\beta)},$$

$$\widetilde{N}_b^2-N_b^2=-\frac{a}{70+34\beta+4\beta^2},$$

$$\widetilde{N}_s^2-N_s^2=\frac{-2a(3+\beta)-(2v_s+\beta-1)(35+17\beta+2\beta^2)}{4(5+\beta)(7+2\beta)}.$$

考虑到参数 a 和 β 均为正值，易得 $\widetilde{N}_b^1-N_b^1>0$ 和 $\widetilde{N}_b^2-N_b^2<0$。进一步地，引理 3 中参数 v_s 满足 $v_s>\frac{1-\beta}{2}$，得到 $\widetilde{N}_s^2-N_s^2<0$。同时，在定理 1 中（2）的情形下的参数空间内，可以得到 $\widetilde{N}_s^1-N_s^1>0$。

证毕。

（七）定理 4 的证明

证明：结合 BW 和 $\tilde{BW}$ 的表达式，整理得到

$$\tilde{BW}-BW=\frac{a^2(29+7\beta)+(1-2v_s-\beta)(1-\beta^2)(35+17\beta+2\beta^2)^2}{4(1-\beta)(5+\beta)^2(7+2\beta)^2}.$$

在定理 1 中（2）的情形下，易得：当 $a<M_1$ 时，有 $\tilde{BW}-BW<0$；当 $a>M_1$ 时，有 $\tilde{BW}-BW>0$。

结合 SW 和 $\tilde{SW}$ 的表达式，整理得到

$$\tilde{SW}-SW=\frac{a^2\left[\frac{4(2+\beta)^2}{(7+2\beta)^2}-\frac{4(1+\beta)^2}{(5+\beta)^2}\right]-(1-\beta)^2(1+2v_s+\beta)^2+4(1-\beta)^2(-1+4v_s+2\beta)}{16(1-\beta)^2}.$$

在定理 1 中（2）的情形下，可以得到 $\tilde{SW}-SW>0$。

结合 W 和 $\widetilde{W}$ 的表达式，整理得到

$$\widetilde{W}-W=\frac{a^2\left[94+\beta(62+3\beta(7+\beta))\right]}{4(1-\beta)(5+\beta)^2(7+2\beta)^2}+\frac{1}{16}(1-2v_s-\beta)(1+6v_s+3\beta).$$

在定理 1 中（2）的情形下，易得：当 $a<M_2$ 时，有 $\widetilde{W}-W<0$；当 $a>M_2$ 时，有 $\widetilde{W}-W>0$。

证毕。