**动态随机一般均衡模型全局非线性分析方法研究进展**

聂光宇 赵云霄

**目录**

附录I 以实际经济周期模型为例，比较线性近似解法与全局非线性解法……..1

附录II 文献综述补充……………………………………………………………….3

附录III 零利率下限模型………………………………………………………….7

附录IV 金融危机模型………………………………………………………….….10

附录V 结构转型中的经济周期模型…………………………………....……….12

附录I 以实际经济周期模型为例，比较线性近似解法与全局非线性解法

我们以一个简单的实际经济周期模型为例，说明全局非线性解与线性近似解法的差异。在该模型中，产出取决于生产率冲击与资本存量：。代表性家庭将在消费与投资之间做分配，来最大化期望效用：。下一期的资本积累等于当期未折旧资本与投资之和：。生产效率冲击服从外生的AR(1)过程：，其中表示均值，。对照正文公式（1）中的一般框架，外生冲击，状态变量，控制变量为，其取值由欧拉方程和预算约束构成的方程组决定[[1]](#footnote-0)：

其中欧拉方程（1）刻画了代表性家庭在权衡消费和投资之后的最优决策。

与全局非线性解法不同，传统的局部近似解法并不直接求解政策函数，而是计算基于确定性稳态的近似解，具体做法如下：第一步，求解正文公式（1）中模型的确定性稳态，稳态代表了各个变量的长期平均值。例如在实际经济周期的例子中令生产效率恒取其均值，可以得到资本与消费的稳态值，。第二步，将正文公式（1）在稳态附近进行泰勒展开（Taylor expansion），其中最为常用的方法是一阶线性展开，因此该方法也常被称为线性近似法[[2]](#footnote-1)。这一步将原始的非线性系统转化为如下的线性系统，极大的简化了模型求解：

其中表示对于下一期控制变量的预期，矩阵的维度为，矩阵的维度为。第三步，求解上面的线性系统，通过待定系数法，得到线性近似的政策函数：

其中的参数维度为，维度为。具体的线性近似求解方法参见Blanchard and Kahn（1980）以及软件Dynare使用教程。此外，研究中常用的另一种近似方法为对数线性化方法，即将各个变量表示为与其稳态值比例的对数形式，，，并在此基础上对正文公式（1）进行一阶泰勒展开。无论是线性化还是对数线性化，其得到的结果只适用于刻画稳态附近的小幅经济波动。如正文所述，更高阶的泰勒展开本质上仍然是局部近似，而且可能造成严重的误差。

图I1刻画了实际经济周期模型中，投资的全局非线性解与线性近似解的区别。为了对两种方法做进一步的区分，我们在模型中对投资加入一个额外的约束：投资须高于稳态值的一个固定比例：，显然该约束收紧时会影响经济周期的性质。可以看出，当状态变量位于稳态值附近时，线性近似解与全局非线性解的结果较为接近，但是随着与其稳态值偏离的增大，线性近似解的误差也逐渐增大。特别是当取值很低，投资约束收紧时，线性近似解无法刻画此时经济周期的性质。



图I1 存在投资约束的RBC模型中两种计算方法的结果比较

注：参数取值为，，，，，外生冲击。

附录II 文献综述补充

（一）全局解法在金融危机领域的应用补充

全局非线性方法广泛应用于研究金融与实体经济的互动关系，以及金融监管领域的文献。He and Krishnamurthy（2012）构造了含有家庭和金融部门（专家）两类决策者的连续时间模型，家庭只能通过专家间接地投资于风险资产。为了缓解其中的道德风险，模型引入了专家的股权资本约束。当专家持有的财富较低时股权资本约束会随之收紧，影响金融中介效率，导致风险溢价上升。Brunnermeier and Sannikov（2014）同样构造了含有专家和家庭两类决策者的连续时间模型。在正常时期，专家有足够净资产以缓冲负向冲击带来的不利影响；而在危机时期模型系统远离其稳态，即使是小幅的冲击也具有放大效应。因此，经济对于外生冲击的反应表现出高度非线性。Ai et al.（2020）认为金融中介通过影响资本在异质性企业中的配置效率从而影响经济周期，金融部门财富值下降会增大实体经济中的资源错配，由此产生的产出和资产价格下跌导致金融部门的财富值进一步下降，在极端情况下可能导致整个金融系统可用资源不足，造成危机。Elenev et al.（2021）构建了一个包含家庭、企业、银行的三部门模型，其中企业部门面临的借贷约束以及银行部门面临的资本充足率约束会产生双重放大效应，在金融危机时产生巨大和持续的衰退。文章还进一步评估了宏观审慎政策的有效性。采用全局解法量化分析金融监管政策的文章还包括Begenau and Landvoigt（2022）、Corbae and D'Erasmo（2021）、Greenwald et al.（2021）等。

（二）求解确定性转移路径的文献综述

很多国内外学者均使用求解确定性转移路径的方法，探讨中国经济增长与转型的相关课题。Song et al.（2011）刻画了民营企业相比国有企业生产效率更高，但难以从外部获得充足的金融支持。随着民营企业自身的资本积累，资本和劳动将逐渐从国有企业向民营企业转移。这一机制导致了宏观层面的高储蓄率、高资本回报率、经济的高速增长与结构变迁、以及持续的贸易盈余。Li et al.（2020）构建了包含国际贸易、投资、借贷的多国动态模型以探讨贸易与投资自由化对于全球失衡现象的影响。文章发现中国2001年加入世界贸易组织不显著影响全球失衡现象，而美国的投资自由化是全球失衡的主要驱动因素。此外，学者们还研究了不同宏观政策与结构变迁，例如人口结构变化（Nie, 2020）、住房市场限购措施（Dong et al., 2021）、利率自由化（Liu, et al., 2021）等。相应的英文文献综述参见Chen and Zha（2023）。近年来，采用该方法的中文论文也不断涌现，例如：彭俞超和何山（2020）发现，资管新规的出台限制了影子银行的活动，使得资源配置效率提高，产出在短期增加但在长期会经历持续的下滑。赵扶扬等（2021）构建了包含地方政府与土地市场的一般均衡模型，认为2008年外部冲击下，地方政府出于基建投资的“土地金融”模式带来了房价升高和地方政府债务上升，并产生资源错配。张军等（2020）研究了官员考核机制对于经济增长的影响，发现2013年对地方官员考核体系做出的结构性调整，即弱化GDP增长、加强环保方面的考核导致地方政府通过投资拉动经济的动力明显下降。

（三）全局解法在罕见灾难领域的应用

罕见灾难是指经济遭遇罕见而大幅的负面冲击，导致产出、消费等宏观变量大幅下跌。罕见灾难的例子包括1929年大萧条、经济危机、两次世界大战、以及地震、海啸等极端天气冲击等。对于罕见灾难风险的研究由Rietz（1988）、Barro（2006）创立，是宏观经济学中的重要领域。当遭遇到罕见灾难冲击时，宏观经济与正常状态或其稳态相距甚远，此时不适合采用线性近似解法，需要使用全局非线性解法。

Gourio（2012）在实际经济周期模型框架中引入发生概率具有时变性的罕见灾难风险，使得模型能够同时解释经济周期和资产价格的性质。文章指出线性近似解所忽略的高阶项实际上会显著地影响模型求解的准确性。线性近似解认为风险厌恶系数只会影响资产价格而基本不会影响宏观总量，然而全局解法发现，如果存在时变性的大幅冲击，风险厌恶系数会显著影响宏观加总变量的动态。在有关罕见灾难风险的另一篇文章中，Gourio（2013）使用全局非线性解法探讨了信贷利差对于经济周期的影响。Barro et al.（2022）的罕见灾难模型全局解得到的结果较好地匹配了实际数据，例如安全资产（无风险债券）占总资产的一个较稳定的比重，财富和股权分布的高度集中于少部分个体，以及由政府和央行发售的安全资产和金融机构发售的安全资产之间的负相关性。全局非线性解法还可应用于其他研究罕见灾难风险的模型框架，如Barro（2006，2009）以及Gabaix（2012）。

气候变化是近年来的研究热点。鉴于气候相关风险具有“概率低、损失大”的特性，易引发经济金融体系的结构性变化（中国人民银行研究局课题组，2020），全局非线性解法同样适用于气候变化课题的研究。Barro（2015）研究了旨在降低未来环境灾害发生概率或严重程度的最优社会支出规模。Gregory（2021）认为从长期来看二氧化碳含量增加带来的环境灾害风险上升会使得家庭转向安全资产，进而无风险利率下降，风险溢价上升。

（四）全局解法在异质性个体模型中的应用

上世纪九十年代以来兴起的另外一脉文献——异质性个体模型——将宏观与微观变量联系起来，主要着眼于刻画微观个体的异质性及其宏观影响。随着近年来微观数据的大量涌现、以及社会对于收入分配、财富分配问题的关注度不断提高，这类模型变得越来越重要。模型假设每个家庭受到个体层面的异质性冲击，例如涨薪、失业等；同时由于金融市场不完备，个体无法购买保险来消除这种冲击对自己的影响。在这种情况下，不同家庭受到冲击的累积效果决定了他们在财富分布中所处的位置：受到持续正向冲击家庭的财富更多，受到负向冲击的家庭则反之。财富分布会在经济周期中不断演进，同时又会作为状态变量对经济周期的性质产生影响。因为财富分布是无穷维的，无法用单一数值来刻画，这极大的增加了全局解的求解难度。此外，异质性个体模型不存在代表性家庭模型中的稳态，不能用局部线性化方法求解。

Krusell and Smith（1998）首次将宏观冲击引入到异质性个体模型中，求解模型的递归均衡，并分析了财富分布对于经济周期的影响及其福利效应。他们用财富分布的若干个矩（例如均值、方差）代表整个分布作为状态变量，从而显著降低状态变量的维度，以便近似地求解均衡。当加入校准的宏观冲击和折现因子冲击后，模型产生的财富分布与实际的财富分布十分接近。Heathcote（2005）在异质性个体的框架下的研究发现，扭曲性税制以及不完备的金融市场会导致李嘉图等价定理不再成立。Hubmer et al.（2016）发现高收入群体税率的大幅下降最能够解释美国过去三十年来贫富差距不断扩大的现象。期刊*Journal of Economic Dynamics and Control*2010年第1期专刊中的文章均基于全局算法，比较了存在宏观不确定性的异质性个体模型的各种求解方法的优劣。Fernández-Villaverde et al.（2023）改进了Krusell and Smith（1998）的算法，设定迭代时使用的宏观加总变量的演进动态为非线性形式而不是对数线性形式，并借助神经网络对宏观加总变量的演进动态进行求解。Maliar et al.（2021）分析了运用深度学习方法求解包括Krusell and Smith（1998）模型在内的高维宏观问题的适用性。关于异质性个体模型的其他算法还可参见Auclert（2021）和Achdou（2022）。

早期的异质性个体模型面临的一个问题是，异质性对于宏观变量的影响很小，其原因在于微观个体的消费、储蓄作为财富的政策函数非常接近于线性，不同家庭的边际消费倾向基本为常数。这一结果导致异质性个体模型与代表性家庭模型相比，在探讨经济周期问题上的优势不明显。Kaplan et al.（2018）在异质性个体模型的基础上引入了价格粘性，构建了异质性个体新凯恩斯（HANK）模型，并在该框架下分析了货币政策的传导机制及效果。文章发现降息的经济刺激效果主要是通过间接效应起作用，即通过一般均衡影响劳动需求、不同资产的配置等渠道从而最终影响总需求，而传统意义上的直接效应——影响家庭消费和储蓄的跨期选择——实际起到的作用很小。而代表性家庭模型只考虑直接效应，不考虑间接效应，因而与HANK模型在分析货币政策传导机制方面存在本质差别。HANK模型近年来被用于探讨很多热点话题，包括非传统货币政策、预期引导、财政乘数、结构性转移支付等，然而其模型求解依赖于复杂的编程计算，部分结果缺乏直观的经济学解释，目前还有很大的发展空间。

（五）全局解法在资产定价领域的应用

资产定价文献关注金融资产价格的决定，例如股票相对于无风险债券的超额收益，以及不同投资者对于金融资产的配置。在研究此类问题时，线性近似解法并不适用，因为在公式（）的线性近似方程组中，投资者的效用函数变为风险中性，无法产生风险溢价，导致股票的回报率与无风险债券相等。同时线性化后，由于各种金融资产的期望回报率相同，在投资者看来这些资产是等价的，从而使得资产组合问题也无法求解。此时全局解法具有明显优势[[3]](#footnote-2)。

全局非线性解法在资产定价领域中的应用十分广泛。Guvenen（2009）基于一个不完备金融市场模型解释了美国数据中观察到的多个资产定价的异常现象，包括较高的股票风险溢价、较低和平稳的利率、以及风险溢价和夏普比率的逆周期性等。他的模型假定存在持股人和非持股人两类个体，二者具有不同的跨期替代弹性，且只有持股人能够参与股票市场。由于持股人的消费水平等变量具有较大的波动性，使用线性近似解法求解模型会带来较大的误差。He and Krishnamurthy（2013）强调了金融中介持有的资本在决定资产价格时的重要性。文章指出线性近似解无法刻画实际数据中风险溢价的时变性，其中股权资本约束作为模型的关键假定，规定了家庭对于金融中介的最大股权投资额，也是风险溢价非线性的主要来源。Brumm et al.（2015）认为，资产的价格不仅取决于其未来的现金流，还取决于资产本身的可抵押性，即债权人在债务违约发生时能够获得的抵押品的比例。资产的可抵押性越强，则该资产的风险溢价越低，而且资产自身收益的波动性也越小。抵押约束的存在导致模型存在高度的非线性。Li and Xu（2023）研究了当金融中介面临杠杆约束时的资产定价问题。文章发现假定约束始终收紧的线性近似解夸大了资产价格的波动性，因此也夸大了风险溢价。不少研究也将不完备金融市场以及异质性个体的设定纳入到了资产定价的模型框架中。例如，Gomes and Michaelides（2008）的理论框架能够同时刻画资产价格和个体资产分布的动态；Gomes et al.（2013）探究了财政政策对于资产价格的影响；Pijoan-Mas（2007）探讨了习惯养成（Habit Formation）这一设定对于股权溢价之谜的解释力度；Storesletten et al.（2007）认为生命周期以及资本积累的设定会降低个体性风险对于夏普比率的解释力度。如前所述，这些模型均需要使用全局非线性解法求解。

（六）全局解法在失业和劳动力市场分析中的应用

Petrosky-Nadeau and Zhang（2017）强调了全局非线性解法对于精确求解经典的Diamond-Mortensen-Pissarides（DMP）失业模型的重要性。失业存在高度非线性：在经济大幅衰退阶段，失业会迅速增加，然而在经济扩张阶段，失业的下降是一个较为缓慢的过程。然而，线性近似解仅关注模型稳态附近的性质，无法刻画大幅衰退时失业的迅速增加，因此会低估失业率的均值与方差，低估负向冲击对失业的不利影响；也无法刻画扩张时失业的缓慢下降，因此会高估市场上劳动力的紧俏程度、失业与职位空缺之间的相关性、以及正向冲击时劳动力紧俏程度的上升。在稳态附近二阶展开的近似解仍然无法准确刻画失业的非线性特征，其准确度甚至差于一阶线性近似解。Petrosky-Nadeau et al.（2018）发现使用全局非线性解法准确地对DMP模型进行求解后，该模型会产生内生的罕见灾难风险，与数据中的观察结果一致。Den Haan et al.（2018）认为不完备金融市场和粘性名义工资的同时存在将导致失业-通缩螺旋，并指出线性近似解法在求解模型时会带来较明显的误差。Pizzinelli et al.（2020）发现在生产率水平较低时，生产率冲击对失业率、入职率和离职率的影响会更大，即劳动市场的波动存在状态依赖性。准确刻画该特征需要使用全局非线性解法。Petrosky-Nadeau and Zhang（2021）基于高度非线性的工作搜寻模型解释了上世纪三十年代大萧条时期美国的失业危机。

附录III 零利率下限模型

我们构建了一个包含家庭、中间品生产商、最终品生产商、中央银行的多部门新凯恩斯模型。家庭选择消费和劳动以最大化其终生的效用。中间品生产商使用劳动作为投入以生产中间品，进而由最终品生产商将其打包为最终品。我们假定中间品生产商在调整其产品价格时需要支付一个价格调整成本，因此存在价格粘性。中央银行依据泰勒规则设定总名义利率。然而，中央银行面临零利率下限的约束，因此总名义利率不能低于1。如正文模型结果所展示，该零利率下限约束的存在使得模型具有很强的非线性。

（一）模型设定

家庭部门选择消费和储蓄，并提供劳动，同时从企业部门获取利润。家庭的最大化问题为：

预算约束为：

其中代表家庭在第*t*期的消费，为劳动供给，为持有的债券数量，为总通货膨胀率，为总利率，为家庭从中间产品生产商处获得的利润。假设债券的净发行量为0，因此在均衡中。折现因子服从如下的AR（1）过程：

其中服从标准正态分布，是模型中唯一的外生冲击。基于家庭的效用最大化决策可以得到如下两个一阶条件：

垄断竞争的中间品生产商使用劳动投入生产差异化的产品，生产函数为：。完全竞争的最终产品生产商重新加工这些差异化产品，基于如下的不变替代弹性生产函数出最终产品由此可以得到对中间品生产商的需求函数为：。其中是中间品的价格，是总的价格水平：。假定每个中间品生产商都可以根据一个凹的价格调整成本函数（Rotemberg，1982）设定自己的价格。具体而言，中间品生产商根据其需求函数选择价格和产出的序列以最大化折现加总后的利润：

其中为工资，折现因子，生产商的价格调整。价格调整成本函数，其中是控制价格调整成本水平的参数，为稳态的通胀率。在均衡时，，以及。结合上述条件，可以得到标准的非线性新凯恩斯菲利普斯曲线：

此外，中间品生产商的利润为：

中央银行依据泰勒规则设定总名义利率，同时面临零利率下限的约束，如式（）所示：

其中代表稳态下的利率水平，是通胀缺口，是产出缺口，参数代表利率对产出和通胀缺口的响应系数。在式（）中的零利率下限为。

（二）模型均衡

由于，，，所以

将（）式代入（）式，可得

模型中存在6个政策变量：，，，，，，以及六个刻画均衡的方程：（），（），（），（），（）和（）。对应于正文公式（1），在这个模型中，外生状态变量为折现因子，不存在内生的状态变量，政策变量为。

（三）参数选取

在模型参数选取方面，我们参照Guerrieri and Iacoviello（2015），设定，，，，，，，。参照Fernndez-Villaverde et al.（2015）设定，。

（四）模型算法

**线性近似解法**：我们使用基于Matlab的插件Dynare提供的线性近似解法对零利率下限模型进行求解。由于线性近似解法无法刻画零利率下限，因而在求解6个政策变量时使用的均衡条件为（），（），（），（）和（）以及如下标准泰勒法则：。

**全局非线性解法**：全局非线性解法的求解目标是寻找政策变量关于状态变量的函数对应关系。在这一零利率下限模型中，唯一的状态变量为折现因子。我们选取折现因子的取值区间为，并将该区间等分为101个格点，定义该集合为。对于模型中涉及到期的变量，我们使用cubic spline插值的方法对其取值进行近似（Judd, 1998, 第225页）。刻画模型均衡的方程依然为（），（），（），（），（）和（）。全局非线性解法的求解遵循第二章介绍的政策函数迭代的思路，具体步骤如下：

步骤一：模型均衡条件中存在涉及到期的政策变量，即消费，产出，通胀率，且这三个变量均应当为期的状态变量的函数，即政策函数。如果已知政策函数的形式方可求解期的模型均衡，然而研究者事前并不知道政策函数的形式。为此，我们猜测消费、产出以及通胀率的政策函数形式为：，，， ，以此为基础开始循环迭代。

步骤二：对于任意一个，以及上一步骤（n-1）中猜测的，，，求解方程组（），（），（），（），（）和（）。

步骤三：将步骤二求得的关于消费、产出以及通胀率的政策函数记为，，。将其与上一步骤（n-1）得到的三个政策函数相比较，记：

 ,

,

,

并定义

。

我们预设的收敛标准为。如果，则步骤二求得的政策函数即为全局非线性解法的求解结果；否则如果，回到步骤二，将猜测更新为，，，重新求解方程组，重复上述步骤直至。

附录IV 金融危机模型

（一）模型设定

代表性家庭在第*t*期的消费由可贸易品和不可贸易品构成：

其中为两种商品间的替代弹性。以可贸易品作为计价商品，不可贸易品的价格为，作为实际汇率的代表。家庭最大化期望效用函数，其预算约束为：

其中为家庭在上一期决定的债券持有量，为国际市场上的利率水平，因此当前的本息之和为。代表对外负债。和分别为可贸易品和不可贸易品的禀赋，由外生的一阶马尔科夫过程决定。代表性家庭选择下一期债券持有量。模型的关键在于存在一个与汇率水平绑定的偶发收紧借贷约束：

其中和为参数。当时，对外借款不能超过本国实际收入的一个固定比例。

（二）模型的竞争均衡

代表性家庭选择来最大化其期望效用。设为预算约束（）和借贷约束（）的拉格朗日乘数，则模型的一阶条件可以表示为：

其中（）为实际汇率的决定，其中根据不可贸易商品的市场出清条件将替换为。（）、（）分别为针对和的一阶条件，借贷约束的存在使得欧拉方程（）的等号右侧出现了对应的乘数，当借贷约束收紧时，。（）与其后的两个不等式构成了互补松弛条件。可贸易品的市场出清条件为：

不可贸易品的市场出清条件为：

由（）-（）六个方程构成的方程组刻画了模型的均衡条件。对应于正文公式（1），此模型中的外生状态变量为，内生状态变量为，政策变量为。

（三）参数选取与模型算法

在正文图3和图4中，本文均使用了Bianchi（2011）表1中的参数设定。模型中的状态变量为当期持有的债券以及外生禀赋，记为。我们选取当期持有债券的取值区间为。外生禀赋的设定与Bianchi（2011）的设定相同。我们将状态变量的所有的取值组合记为集合。为了找出政策变量与状态变量之间的函数对应关系，遵循第二章介绍的政策函数迭代的思路，以正文图3和图4的计算为例，全局解法的具体步骤如下：

步骤一：模型均衡条件中存在涉及到期的政策变量，即预算约束的拉格朗日乘数，该变量应当为期的状态变量的函数，即政策函数。如果已知该政策函数的形式方可求解期的模型均衡，然而研究者事前并不知道该政策函数的形式。我们首先猜测拉格朗日乘数与状态变量的对应关系为，，以此为基础开始循环迭代。

步骤二：对于任意的，以及上一个步骤猜测的，求解方程组（）-（）。

步骤三：将步骤二求得拉格朗日乘数的政策函数记为。将其与上一个步骤得到的政策函数进行比较。我们预设的收敛标准为，如果

,

则停止迭代，步骤二得到的政策函数即为所求；否则返回步骤二，并将猜测更新为，重复迭代直至关于的政策函数收敛。

对于正文表1的计算，我们固定，并假设冲击服从AR（1）过程，其参数与Bianchi（2011）匹配。通过Tauchen（1986）的方法将离散化为从小到大的5个值，相互之间差距为1个标准差。其余参数设定与Bianchi（2011）相同。我们计算当取值从变为时，各个变量变化的百分比。例如当前债券持有为时，消费的变化定义为。采用相同方法可以计算不存在借贷约束的经济中的变化程度，并计算两者的差值。最后，我们基于蒙特卡洛模拟，用时，在借贷约束（）收紧状态（未收紧状态）下的稳态分布加权得到借贷约束收紧（未收紧）时的平均差距。

附录V 结构转型中的经济周期模型

（一）模型设定

假定经济体中有两个部门，分别是农业（G）和非农业（M）。作为计价物的最终产品是农业产出和非农产出的函数：

其中为权重，为两种商品之间的替代弹性。非农部门的生产需要投入资本和劳动：，而农业的生产仅须投入劳动：。为部门的劳动生产率（），其在第*t*期的取值由两部分相乘得到：，其中为生产率的趋势值，给定初始的生产率，以的速率确定性增长：；而暂时性冲击使生产率产生相对于长期趋势的偏离。服从外生的AR(1)过程。假设非农部门的劳动生产率以更快的速度增长：。

代表性个体最大化效用函数：

其预算约束为：

其中为折现率，为人均消费，为劳动时长。为总人口，假设人口增长率为，总人口等于非农业和农业两部门的就业人数之和：。部门的实际劳动供给等于该部门就业人数与个体劳动时长的乘积：，。为了匹配数据中两部门之间持续存在的工资差距，假设政府对非农部门征收比例为的劳动所得税，并将税收所得一次性返还给代表性个体。因此在均衡时，市场工资与两部门支付的工资存在如下关系：，。该税收造成了劳动力市场的扭曲，导致了农业部门劳动力过剩，并压低了工资水平。

（二）模型均衡

在第*t*期，代表性个体选择消费、劳动时长、以及资本积累以最大化其效用函数。我们定义非农部门的劳动力占比（农业部门为）。鉴于经济体处于人口增长与技术进步的结构转型中，定义、为趋势调整后的人均消费与资本。第*t*期模型的均衡条件可以表示为如下方程组：

其中（）为关于资本积累的欧拉方程，（）为基于部门间税后工资相等得到的非农部门劳动力占比，（）为代表性个体在消费和劳动时长之间的选择，（）为预算约束[[4]](#footnote-3)。对应于正文公式（1），此时模型的外生状态变量为，内生状态变量为，政策变量为。此处并未将生产率的趋势值放入状态变量中，因为给定初始条件，在整个经济演进路径上的取值均为已知。

（三）参数选取

我们选取，以使模型生成的2012年农业就业占比与实际数据匹配。其余参数取值与SZZ中的基准模型相同。

（四）模型算法

（a）我们先求解该模型的确定性转移路径，即给定初始条件并假设无外生冲击（），选择一个足够大的时点，假设经济在第期之后收敛到只存在单一非农业部门的长期稳态，求解经济从到期的确定性演进路径。我们将的单部门长期稳态记为，同时以上标表示确定性转移路径。本部分算法的核心是对于的演进路径不断迭代直至其收敛。具体步骤如下：

步骤一：参照SZZ选择1985年作为初始年份。求解单部门模型的长期稳态，得到。

步骤二：猜测在时点至时点之间变量的一系列取值，将变量的路径记为。

步骤三：给定上一步骤的猜测，通过（）-（）式求得其他变量的演进路径。

步骤四：使用（）式以及更新变量的演进路径。比较和更新后的。我们预设收敛标准为。如果

则步骤三求得的变量演进路径即为所求；否则将对于的演进路径的猜测更改为，同时返回步骤三重复计算，直至路径收敛为止。最终计算结果如正文图5所示。

（b）在得到模型确定性转移路径后，我们考虑模型围绕确定性转移路径的波动。对于模型中涉及到期的变量，我们使用cubic spline插值的方法对其取值进行近似（Judd, 1998, 第225页）。具体步骤如下：

步骤一：使用Tauchen（1986）的方法，将外生状态变量——生产率的波动项进行离散化，其中和分别被离散化为3个不同的取值，因此外生状态变量共有9中不同的取值组合。

步骤二：由于第期之后的长期稳态中只有非农部门，因此我们选取作为迭代的初始时点，并且采用第二章中介绍的政策函数迭代法，求解时单部门模型的政策函数。此时模型的均衡条件为方程（），（），（）以及。对应于正文公式（1），内生状态变量为，政策变量为。我们将内生状态变量的取值设定为区间上等距的51个格点。记状态变量所有取值组合的集合为。步骤二具体分为如下的子步骤：

子步骤（i）：定义

这是模型中唯一的涉及到的政策变量。如果已知该政策变量关于状态变量的函数形式方可求解期的模型均衡，然而研究者事前并不知道该函数形式。我们首先猜测变量的政策函数形式为，，以此为基础开始循环迭代。

子步骤（ii）：对于任意的，以及上一个子步骤中的猜测，求解方程组（），（），（）以及。

子步骤（iii）：将子步骤（ii）中得到的关于变量的政策函数记为。我们选取的收敛标准为，如果

,

则子步骤（ii）中得到的政策函数即为全局非线性解法的求解结果；否则返回子步骤（ii），同时将猜测更新为，重新求解方程组，并重复上述子步骤直至收敛。

步骤三：采用逆向递归的方式，基于（）-（）的方程组，求解每一期的政策函数。例如在第期，我们已经得到了下一期的政策函数，即（）式右边涉及到的下一期内生变量作为下一期状态变量的函数形式是已知的。因此，我们可以通过上述方程组求解时的政策函数，并以此类推，不断逆向迭代求解，一直到初始第0期的模型均衡。在每一期的计算中，我们随时间调整当前生产率的趋势值，并且参照确定性转移路径调整内生状态变量的取值格点。具体地，对于任意的一期，我们首先找出确定性转移路径中的，然后将当期内生状态变量的取值设定为区间上等距的51个格点。

**参考文献**

[1] Achdou，Y.，J. Han，J. Lasry，P. Lions，and B. Moll，“Income and Wealth Distribution in Macroeconomics：A Continuous-Time Approach”，*The Review of Economic Studies*，2022，89（1），45–86.

[2] Ai，H.，K. Li，and F. Yang，“Financial Intermediation and Capital Reallocation”，*Journal of Financial Economics*，2020，138（3），663–686.

[3] Auclert，A.，B. Bardóczy，M. Rognlie，and L. Straub，“Using the Sequence-Space Jacobian to Solve and Estimate Heterogeneous-Agent Models”，*Econometrica*，2021，89（5），2375–2408.

[4] Barro，R. J.，“Rare Disasters and Asset Markets in the Twentieth Century”，*The Quarterly Journal of Economics*，2006，121（3），823–866.

[5] Barro，R. J.，“Rare Disasters，Asset Prices，and Welfare Costs”，*American Economic Review*，2009，99（1），243–264.

[6] Barro，R. J.，“Environmental Protection，Rare Disasters and Discount Rates”，*Economica*，2015，82（325），1–23.

[7] Barro，R. J.，J. Fernández-Villaverde，O. Levintal，and A. Mollerus，“Safe Assets”，*The Economic Journal*，2022，132（646），2075–2100.

[8] Begenau，J.，and T. Landvoigt，“Financial Regulation in a Quantitative Model of the Modern Banking System”，*The Review of Economic Studies*，2022，89（4），1748–1784.

[9] Bianchi，J.，“Overborrowing and Systemic Externalities in the Business Cycle”，*American Economic Review*，2011，101（7），3400–3426.

[10] Blanchard，O. J.，and C. M. Kahn，“The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations”，*Econometrica*，1980，48（5），1305–1311.

[11] Brumm，J.，M. Grill，F. Kubler，and K. Schmedders，“Collateral Requirements and Asset Prices”，*International Economic Review*，2015，56（1），1–25.

[12] Brunnermeier，M. K.，and Y. Sannikov，“A Macroeconomic Model with a Financial Sector”，*American Economic Review*，2014，104（2），379–421.

[13] Chen，K.，and T. Zha，“China’s Macroeconomic Development：The Role of Gradualist Reforms”，National Bureau of Economic Research Working Paper，2023，<https://www.nber.org/papers/w31395>.

[14] Christiano，L. J.，M. S. Eichenbaum，and M. Trabandt，“On DSGE Models”，*Journal of Economic Perspectives*，2018，32（3），113–140.

[15] Corbae，D.，and P. D'Erasmo，“Capital Buffers in a Quantitative Model of Banking Industry Dynamics”，*Econometrica*，2021，89（6），2975–3023.

[16] Den Haan，W. J，P. Rendahl，and M. Riegler.，“Unemployment （Fears） and Deflationary Spirals”，*Journal of the European Economic Association*，2018，16（5），1281–1349.

[17] Devereux，M. B.，and A. Sutherland，“Country Portfolio Dynamics”，*Journal of Economic Dynamics and Control*，2010，34（7），1325–1342.

[18] Dong F.，J. Liu，Z. Xu，and B. Zhao，“Flight to Housing in China”，*Journal of Economic Dynamics and Control*，2021，130，104189，1–28.

[19] Elenev，V.，T. Landvoigt，and S. Van Nieuwerburgh，“A Macroeconomic Model with Financially Constrained Producers and Intermediaries”，*Econometrica*，2021，89（3），1361–1418.

[20] Fernández-Villaverde，J.，G. Gordon，P. Guerrón-Quintana and J. F. Rubio-Ramírez，“Nonlinear Adventures at the Zero Lower Bound”，*Journal of Economic Dynamics and Control*，2015，57，182–204.

[21] Fernández-Villaverde，J.，S. Hurtado，and G. Nuño，“Financial Frictions and the Wealth Distribution”，*Econometrica*，2023，91（3），869–901.

[22] Gabaix，X.，“Variable Rare Disasters：An Exactly Solved Framework for Ten Puzzles in Macro-Finance”，*The Quarterly Journal of Economics*，2012，127（2），645–700.

[23] Gomes，F.，and A. Michaelides，“Asset Pricing with Limited Risk Sharing and Heterogeneous Agents”，*The Review of Financial Studies*，2008，21（1），415–448.

[24] Gomes F.，A. Michaelides，and V. Polkovnichenko，“Fiscal Policy and Asset Prices with Incomplete Markets”，*The Review of Financial Studies*，2013，26（2），531–566.

[25] Gourio，F.，“Disaster Risk and Business Cycles”，*American Economic Review*，2012，102 （6），2734–2766.

[26] Gourio，F.，“Credit Risk and Disaster Risk”，*American Economic Journal：Macroeconomics*，2013，5（3），1–34.

[27] Greenwald，D.L.，T. Landvoigt，and S. Van Nieuwerburgh，“Financial Fragility with SAM?”，*The Journal of Finance*，2021，76，651–706.

[28] Gregory，R. P.，“Climate Disasters，Carbon Dioxide，and Financial Fundamentals”，*The Quarterly Review of Economics and Finance*，2021，79，45–58.

[29] Guerrieri，L. and M. Iacoviello，“OccBin：A Toolkit for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints Easily”，*Journal of Monetary Economics*，2015，70，22–38.

[30] Guvenen，F.，“A Parsimonious Macroeconomic Model for Asset Pricing”，*Econometrica*，2009，77（6），1711–1750.

[31] He，Z.，and A. Krishnamurthy，“A Model of Capital and Crises”，*The Review of Economic Studies*，2012，79（2），735–777.

[32] He，Z.，and A. Krishnamurthy，“Intermediary Asset Pricing”，*American Economic Review*，2013，103（2），732–770.

[33] Heathcote，J.，“Fiscal Policy with Heterogeneous Agents and Incomplete Markets”，*The Review of Economic Studies*，2005，72（1），161–188.

[34] Hubmer，J.，P. Krusell，and A. Smith，“The Historical Evolution of the Wealth Distribution: A Quantitative-Theoretic Investigation”，National Bureau of Economic Research Working Paper，2016，<https://www.nber.org/papers/w23011>.

[35] Judd K. L.，Numerical Methods in Economics，Cambridge：The MIT Press，1998.

[36] Kaplan，G.，B. Moll，and G. L. Violante，“Monetary Policy According to HANK”，*American Economic Review*，2018，108（3），697–743.

[37] Krusell，P.，and J. A. A. Smith，“Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy”，*Journal of Political Economy*，1998，106（5），867–896.

[38] Li，W，G. Nie，and Z. Wang，“Trade，FDI，and Global Imbalances”，*Journal of International Money and Finance*，2020，105，102188，1–20.

[39] Li，K.，and C. Xu，“Asset Pricing with a Financial Sector”，*Financial Management*，2023，52（1），67–95.

[40] Liu，Z.，P. Wang，and Z. Xu，“Interest Rate Liberalization and Capital Misallocations”，*American Economic Journal: Macroeconomics*，2021，13（2），373–419.

[41] Maliar，L.，S. Maliar，and P. Winant，“Deep Learning for Solving Dynamic Economic Models”，*Journal of Monetary Economics*，2021，122，76–101.

[42] Nie，G.，“Marriage Squeeze，Marriage Age and the Household Savings Rate in China”，*Journal of Development Economics*，2020，147，102558，1–26.

[43] 彭俞超、何山，“资管新规、影子银行与经济高质量发展”，《世界经济》，2020年第1期，第47－69页。

[44] Petrosky-Nadeau，N.，and L. Zhang，“Solving the Diamond-Mortensen-Pissarides Model Accurately”，*Quantitative Economics*，2017，8（2），611–650.

[45] Petrosky-Nadeau，N.，and L. Zhang，“Unemployment Crises”，*Journal of Monetary Economics*，2021，117，335–353.

[46] Petrosky-Nadeau，N.，L. Zhang，and L. Kuehn，“Endogenous Disasters”，*American Economic Review*，2018，108（8），2212–2245.

[47] Pijoan-Mas，J.，“Pricing Risk in Economies with Heterogeneous Agents and Incomplete Markets”，*Journal of the European Economic Association*，2007，5（5），987–1015.

[48] Pizzinelli，C.，K. Theodoridis，and F. Zanetti，“State Dependence in Labor Market Fluctuations”，*International Economic Review*，2020，61（3），1027–1072.

[49] Rietz T. A.，“The Equity Risk Premium：a Solution”，*Journal of Monetary Economics*，1988，22（1），117–131.

[50] Rotemberg，J.，“Sticky Prices in the United States”，*Journal of Political Economy*，1982，90（6），1187–1211.

[51] Song，Z.，K. Storesletten，and F. Zilibotti，“Growing Like China”，*American Economic Review*，2011，101（1），196–233.

[52] Storesletten，K.，C. I. Telmer，and A. Yaron，“Asset Pricing with Idiosyncratic Risk and Overlapping Generations”，*Review of Economic Dynamics*，2007，10（4），519–548.

[53] Storesletten，K.，B. Zhao and F. Zilibotti，“Business Cycle During Structural Change: Arthur Lewis’ Theory from a Neoclassical Perspective”，National Bureau of Economic Research Working Paper，2019，https://www.nber.org/papers/w26181.

[54] Tauchen，G.，“Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions”，*Economic Letters*，1986，20（2），177–181.

[55] 张军、樊海潮、许志伟、周龙飞，“GDP 增速的结构性下调: 官员考核机制的视角”，《经济研究》，2020年第5期，第31－48页。

[56] 赵扶扬、陈斌开、刘守英，“宏观调控、地方政府与中国经济发展模式转型: 土地供给的视角”，《经济研究》，2021年第7期，第4－23页。

[57] 中国人民银行研究局课题组，“气候相关金融风险——基于央行职能的分析”，《中国人民银行工作论文》，2020年第3号，第1－24页。

**注：该附录是期刊所发表论文的组成部分，同样视为作者公开发表的内容。如研究中使用该附录中的内容，请务必在研究成果上注明附录下载出处。**

1. 控制变量的个数须与方程组中方程的个数相同。如果我们将投资$I\_{t}$添加为控制变量：$x\_{t}=\left\{C\_{t},K\_{t+1},I\_{t}\right\}$，则须同时将资本积累$K\_{t+1}=\left(1−δ\right)K\_{t}+I\_{t}$添加到方程组中。在实际操作中，研究者可以根据需要自行设定控制变量。 [↑](#footnote-ref-0)
2. Christiano et al.（2018）解释了线性近似解法在早期流行的三个主要原因：首先，二战后发达国家的宏观经济变量波动保持在稳态值的附近，此时线性近似解法的误差较小；其次，相比于非线性问题，早期的统计和计量分析方法更适合解决线性问题；最后，受限于电脑计算速度的制约，求解和估计非线性模型实施起来较为困难。 [↑](#footnote-ref-1)
3. 有学者采用二阶或更高阶的局部近似法求解资产定价与资产组合问题，例如Devereux and Sutherland（2010）在研究海外资产的价值波动问题时，采用了二阶近似方法求解。但是这一方法只适用于他们研究的具体问题，同时本质上仍然为局部近似法，只适用于分析资产价格在稳态附近小幅波动的情况。 [↑](#footnote-ref-2)
4. 此处$\frac{Y\_{t}^{G}}{Y\_{t}^{M}}=\frac{Λ\_{t}^{G}\left(1−ν\_{t}^{M}\right)}{Λ\_{t}^{M}\left(\frac{\hat{χ}\_{t}}{ℎ\_{t}}\right)^{1−α}\left(ν\_{t}^{M}\right)^{α}}$，$η\_{t}=\left[γ\left(\frac{Y\_{t}^{G}}{Y\_{t}^{M}}\right)^{\frac{ε−1}{ε}}+\left(1−γ\right)\right]^{\frac{ε}{ε−1}}$。均衡条件的推导过程以及算法详见SZZ。 [↑](#footnote-ref-3)