附　录

A. 理论模型的证明过程

证明：定理1

在非竞争性的效用结构与纯粹的公立教育的情形中，学生的理性决策由以下优化问题确定：

$$\max_T U_s = \frac{1}{\beta}\log(1-T) + u(I^\alpha T^{1-\alpha}).$$

一阶条件：

$$-\frac{1}{\beta}\frac{1}{1-T} + (1-\alpha)u' \cdot \left(\frac{I}{T}\right)^\alpha = 0.$$

移项对 I 求导可得：

$$\left[\eta'(T) - (1-\alpha)\left(\frac{I^2}{T}\right)^\alpha u''\right] \cdot T_I = \alpha(T^{1-\alpha}I^{2\alpha-1}u'' + I^{\alpha-1}u'),$$

其中T_I如正文所述为优化问题的解$T^* = T(I,\beta)$关于参数 I 的偏导，η 为如下增函数：

$$\eta(T) = \frac{1}{(1-\alpha)\beta}\frac{T^\alpha}{1-T},\ T \in (0,1).$$

注意到等式左侧中括号内的部分恒为正数，则$T_I > 0$ 当且仅当：

$$T^{1-\alpha}I^{2\alpha-1}u'' + I^{\alpha-1}u' > 0 \Leftrightarrow u''M + u' > 0 \Leftrightarrow [u'(M) \cdot M]' > 0.$$

证明：引理1

在竞争性的效用结构与纯粹的公立教育的情形中，给定系统中除了学生 i，其他学生的策略都如同引理1所述，那么无论学生 i 的策略是什么，根据 B 的定义，其能实现升学当且仅当$M_i \geq B$。假设学生 i 的勤奋偏好满足条件(*)：

$$\beta_i > -\frac{1}{u_s}\log\left(1 - \left(\frac{B}{I^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right), \tag{*}$$

那么学生 i 选择的最优学习时间将为：

$$T^* = \left(\frac{B}{I^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

因为：第一，任何时间长度不足T^*的时间都会导致学生 i 无法实现升学，而根据条件(*)，以T^*的学习时间实现升学的情形比所有不升学的情形给 i 带来的效用更大；第二，任何时间长度超过T^*的时间给 i 带来的效用都不及T^*，因为已经实现升学的情况下额外的学习时间不会带来额外的奖励，只会因为损害闲暇而带来额外的负效用。

假设学生 i 的勤奋偏好不满足条件(*)，那么学生 i 选择的最优学习时间将为0。因为：第一，不满足条件(*)时，学生 i 选择0学习时间的效用超过学生以T^*的学习时间实现升学的情形的效用，而后者是升学的情形中效用最高的，所以学生 i 不会选择升学；第二，给定学生 i 不升学，他不会选择任何超过0的学习时间，因为给定不升学，

额外的学习时间不会带来额外的奖励，只会因为损害闲暇而带来额外的负效用。

综上所述，学生 i 的策略也将是：

$$T_i = \mathbb{I}\left(\beta_i > -\frac{1}{u_s}\log\left(1-\left(\frac{B}{I^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\right) \cdot \left(\frac{B}{I^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

那么引理 1 中的策略组合就是一个纳什均衡。

证明：定理 2

根据定义和引理 1，B 是如下方程的解：

$$1-\delta = \int_0^1 \mathbb{I}(M_i < B)\, di = \int_0^{-\frac{1}{us}\log(1-T^*)} e(\beta)\, d\beta,$$

其中，T^*是 I，B 的函数：

$$T^* = \left(\frac{B}{I^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

$e(\beta)$是勤奋偏好在人群中的分布的密度函数。

对上述方程最左端和最右端同时关于 I 求全导，有：

$$0 = e\left(-\frac{1}{u_s}\log(1-T^*)\right)\frac{1}{u_s(T^*-1)}\frac{dT^*}{dI}.$$

那么：

$$e\left(-\frac{1}{u_s}\log(1-T^*)\right) > 0,\ \frac{1}{u_s(T^*-1)} < 0 \Rightarrow \frac{dT^*}{dI} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{B(I)}{I^\alpha}\right)}{dI} = 0.$$

证明：引理 2

称引理 2 中谈到的曲线为关键曲线。

在竞争性的效用结构与双轨制教育的情形中，给定系统中除了家庭 i，其他家庭和学生的策略都如同引理 2 所述。那么无论家庭 i 的策略是什么，根据 B 的定义，学生 i 能实现升学当且仅当$M_i \geqslant B$。简单计算可得，此时条件式(2)成立就等效于关键曲线存在且其上的任意一点(I^H, T)实现的效用超过(0，0)实现的效用。

假设家庭 i 的经济禀赋和学生 i 的勤奋偏好满足引理 2 中的条件式(2)，且学生 i 的学习时间决策为T_i，T_i是关键曲线上可取的某一点对应的 T。那么家庭 i 选择的最优家庭教育投资将为：

$$I^{H*} = \left(\frac{B}{T_i^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - I^G.$$

因为：第一，任何不足I^{H*}的家庭教育投资都会导致学生 i 无法实现升学，而根据条件式(2)，以I^{H*}的家庭教育投资实现升学的情形比所有不升学的情形给家庭 i 带来的效用更大；第二，任何大小超过I^{H*}的家庭教育投入给家庭 i 带来的效用都不及I^{H*}，因为已经实现升学的情况下额外的家庭教育投入不会带来额外的奖励，只会因为损害消费而带来额外的负效用。注意到，此时的家庭和学生 i 的决策就是关键曲线上的一点。

假设家庭 i 的经济禀赋和学生 i 的勤奋偏好不满足引理 2 中的条件式(2)，且学生 i 的学习时间决策为 0，那么家庭 i 选择的最优家庭教育投资将为 0。因为：第一，学生 i 不进行学习时，无论如何家庭 i 都无法让其升学；第二，给定学生 i 不升学，家庭 i 不

会选择任何超过 0 的家庭教育投资，因为给定不升学，额外的家庭教育投资不会带来额外的奖励，只会因为损害消费而带来额外的负效用。注意到，此时的家庭和学生 i 的决策就是(0，0)。

反之，假设家庭 i 的经济禀赋和学生 i 的勤奋偏好满足引理 2 中的条件式(2)，且家庭 i 的家庭教育投资决策为I_i^H，I_i^H是关键曲线上可取的某一点对应的I^H。那么学生 i 选择的最优学习时间将为：

$$T^* = \left(\frac{B}{(I^G + I^H)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

因为：第一，任何不足T^*的学习时间都会导致学生 i 无法实现升学，而根据条件式(2)，以T^*的学习时间实现升学的情形比所有不升学的情形给学生 i 带来的效用更大；第二，任何大小超过T^*的学习时间给学生 i 带来的效用都不及T^*，因为已经实现升学的情况下额外的学习时间不会带来额外的奖励，只会因为损害闲暇而带来额外的负效用。注意到，此时的家庭和学生 i 的决策就是关键曲线上的一点。

假设家庭 i 的经济禀赋和学生 i 的勤奋偏好不满足引理 2 中的条件式(2)，且家庭 i 的家庭教育投入决策为 0，那么学生 i 选择的最优学习时间将为 0。因为：第一，家庭 i 不进行家庭教育投资时，无论如何学生 i 都无法升学；第二，给定学生 i 不升学，学生 i 不会选择任何超过 0 的学习时间，因为给定不升学，额外的学习时间不会带来额外的奖励，只会因为损害闲暇而带来额外的负效用。注意到，此时的家庭和学生 i 的决策就是(0，0)。

综上所述，给定其他人的策略都如引理 2 所言，那么家庭 i 和学生 i 在条件式(2)满足的情况下的所有决策均衡恰巧构成关键曲线，而在条件式(2)不满足的情况下为(0，0)。

那么引理 2 中的策略组合就是一个纳什均衡。

证明：引理 3

根据定义和引理 2，B 是如下方程的解：

$$\delta = \int_0^{+\infty} d\beta \int_{W_C(\beta,\ B(I^G,\ \delta),\ I^G)}^{+\infty} e(W,\ \beta)\, dW, \tag{**}$$

其中W_C即是条件式(2)的右侧，关于 β，B，I^G 的函数。考虑到 e 实际上是联合分布的密度，因而关于 β 的收敛条件是满足的，对方程(**)两边关于I^G求导可得：

$$0 = \int_0^{+\infty} -\frac{e(W_C,\ \beta)}{1-e^{-uh}}\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{B}{1-e^{-\beta u_s}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\partial B}{\partial I^G} - 1\right) d\beta.$$

注意到：

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{B}{1-e^{-\beta u_s}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\partial B}{\partial I^G} - 1.$$

关于 β 是一个连续单调递减函数，因此它最多有一个零点。这一零点是存在的，因为：假设它没有任何零点，那么该连续单调函数要么严格恒大于 0，要么严格恒小于 0；由于禀赋分布是合适的，$e(W_C,\ \beta)$也严格恒大于 0，则被积函数要么严格恒大于 0，要么严格恒小于 0；其 0 到正无穷积分的结果也要么严格恒大于 0，要么严格恒小于 0，不可能恰好为 0。因此这一零点是存在的，假设这一零点是$\beta_0 \in (0,\ +\infty)$，则：

$$\frac{\partial B}{\partial I^G}=\left(\frac{1-e^{-\beta_0 u_s}}{B}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\in(0,\ \alpha B^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}).$$

类似的，对方程(**)两边关于I^G求导可得：

$$1=\int_0^{+\infty}-\frac{e(W_C,\ \beta)}{\alpha(1-e^{-u_h})}\left(\frac{B}{1-e^{-\beta u_s}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\frac{\partial B}{\partial \delta}d\beta.$$

则：

$$\frac{\partial B}{\partial \delta}=\left[\int_0^{+\infty}-\frac{e(W_C,\ \beta)}{\alpha(1-e^{-u_h})}\left(\frac{B}{1-e^{-\beta u_s}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}d\beta\right]^{-1}<0.$$

证明：定理 3

只需证明如下等价命题：

对任意 $0<\Delta I_G<I_G$，存在$\bar{\beta}(\Delta I_G)>0$，使得：

$W_C(\beta,\ B(I^G-\Delta I^G,\ \delta),\ I^G-\Delta I^G)>W_C(\beta,\ B(I^G,\ \delta),\ I^G),\ \forall\beta>\bar{\beta}(\Delta I^G)$，

$W_C(\beta,\ B(I^G-\Delta I^G,\ \delta),\ I^G-\Delta I^G)<W_C(\beta,\ B(I^G,\ \delta),\ I^G),\ \forall\beta<\bar{\beta}(\Delta I^G)$.

该命题又等价于如下命题：

对任意 $0<\Delta I_G<I_G$，关于 β 的函数：

$$L(\beta)=W_C(\beta,\ B(I^G-\Delta I^G,\ \delta),\ I^G-\Delta I^G)-W_C(\beta,\ B(I^G,\ \delta),\ I^G)$$

单调递减且有且仅有一个零点。

我们对此进行证明。

$$L(\beta)=\frac{1}{1-e^{-u_h}}\left[\frac{B(I^G-\Delta I^G,\ \delta)^{1/\alpha}-B(I^G,\ \delta)^{1/\alpha}}{1-e^{-\beta u_s}}+\Delta I_G\right].$$

显然，它关于 β 单调递减。一方面，由引理 3：

$$B(I^G-\Delta I^G)^{1/\alpha}-B(I^G)^{\frac{1}{\alpha}}<0\Rightarrow\lim_{\beta\to 0}L(\beta)=\frac{1}{1-e^{-u_h}}(-\infty+\Delta I^G)=-\infty<0.$$

另一方面，由微分中值定理，$\exists\lambda\in[0,\ 1]$，使得，

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to+\infty}L(\beta)&=\frac{1}{1-e^{-u_h}}(B(I^G-\Delta I^G)^{\frac{1}{\alpha}}-B(I^G)^{\frac{1}{\alpha}}+\Delta I^G)\\&=\frac{1}{1-e^{-u_h}}(-(B\ (I^G-\lambda\Delta I^G)^{\frac{1}{\alpha}})'\Delta I^G+\Delta I^G).\end{aligned}$$

又由引理 3：

$$\begin{aligned}(B(I^G-\lambda\Delta I^G)^{\frac{1}{\alpha}})'&=\frac{1}{\alpha}B(I^G-\lambda\Delta I^G)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}B'(I^G-\lambda\Delta I^G)\\&<\frac{1}{\alpha}B(I^G-\lambda\Delta I^G)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot\alpha B\ (I^G-\lambda\Delta I^G)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}=1.\end{aligned}$$

因此：

$$\lim_{\beta\to+\infty}L(\beta)>\frac{1}{1-e^{-u_h}}(-1\cdot\Delta I^G+\Delta I^G)=0.$$

$L(\beta)$在 $(0,\ +\infty)$ 都连续且单调，则由零点存在定理，对任意的 $0<\Delta I^G<I^G$，函数 $L(\beta)$都是存在唯一零点的。设该零点为β_0，相应的，$W_C(\beta_0,\ B(I^G-\Delta I^G),\ I^G-\Delta I^G)$ 即为所需的$\bar{W}(\Delta I^G)$。

证明：定理 4

考虑学生投入的学习时间不变：

$$(I^G+I^F)^{\alpha}T^{1-\alpha}=B,$$

$$(I^G-\Delta I^G+I^{F\prime})^{\alpha}T^{1-\alpha}=B-\Delta B.$$

两式相除得到：

$$\frac{I^G-\Delta I^G+I^{F\prime}}{I^G+I^F}=\left(1-\frac{\Delta B}{B}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cong 1-\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta B}{B}$$

则容易计算发现：

$$I'_F>I_F\Leftrightarrow\frac{\Delta I^G}{I^G+I^F}>\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta B}{B}.$$

B. 稳健性检验的具体结果

附表 1　用稳健减负指数衡量的教育减负政策对教育产出的影响

变量	OLS		Probit	
	(1)	(2)	(3)	(4)
平均稳健减负指数	0.008	−0.054*	0.007	−0.051*
	(0.012)	(0.032)	(0.046)	(0.110)
ln（家庭收入）×平均稳健减负指数	—	0.007**	—	0.006**
		(0.003)		(0.011)
ln（家庭收入）	0.001	−0.024*	0.000	−0.024*
	(0.009)	(0.013)	(0.033)	(0.052)
居住于城市地区	0.003	0.005	0.005	0.007
	(0.020)	(0.020)	(0.072)	(0.072)
男性	0.017	0.017	0.019	0.018
	(0.017)	(0.017)	(0.062)	(0.062)
父亲受教育年限	0.003	0.002	0.003	0.003
	(0.003)	(0.003)	(0.014)	(0.014)
母亲受教育年限	−0.002	−0.002	−0.002	−0.002
	(0.003)	(0.003)	(0.013)	(0.013)
初中就读重点班的情况（基准组：初中学校不区分重点班）				
初中就读于非重点班	−0.020	−0.020	−0.018	−0.018
	(0.020)	(0.020)	(0.069)	(0.069)
初中就读于重点班	0.103***	0.104***	0.122***	0.124***
	(0.022)	(0.022)	(0.102)	(0.102)
观测值个数	2 235	2 235	2 234	2 234
R-squared	0.050	0.052		

注：回归控制省份和毕业年份固定效应；Probit 模型报告的是边际效应；括号中为稳健标准误；*** $p<0.01$，** $p<0.05$，* $p<0.1$。

附表 2　用稳健减负指数衡量的减负政策对教育投入的影响

变量	ln（教育支出）		学习时间		ln（教育支出）
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
稳健减负指数	0.013	−0.268**	−0.525	−6.451***	0.058
	(0.039)	(0.106)	(1.721)	(2.410)	(0.098)
ln（家庭收入）×稳健减负指数	—	0.034***	—	0.759***	0.031***
		(0.012)		(0.217)	(0.011)
ln（家庭收入）	0.003	−0.253***	1.141*	−4.496***	−0.220**
	(0.035)	(0.097)	(0.610)	(1.724)	(0.089)
ln（前期校外教育支出）×减负指数	—	—	—	—	−0.049***
					(0.002)
ln（前期校外教育支出）	—	—	—	—	−0.078***
					(0.016)
就读重点班的情况（基准组：学校不区分重点班）					
学生就读于非重点班	0.016	0.018	0.152	0.269	0.058
	(0.086)	(0.086)	(1.659)	(1.650)	(0.079)
学生就读于重点班	0.065	0.069	2.608	2.854	0.093
	(0.139)	(0.139)	(2.084)	(2.073)	(0.130)
目前就读年级（基准组：小学低年级）					
小学高年级	−0.133	−0.139	15.92**	15.70**	−0.087
	(0.172)	(0.171)	(6.891)	(6.850)	(0.172)
初中	0.301	0.303	20.91***	20.65***	0.322
	(0.230)	(0.229)	(7.228)	(7.185)	(0.212)
观测值个数	9 479	9 479	3 833	3 833	9 353
R-squared	0.167	0.169	0.083	0.095	0.309
追踪个体数	5 383	5 383	2 902	2 902	5 351

注：家庭收入为滞后一期的值；回归还控制了个体和时间固定效应；括号中为稳健标准误；*** $p<0.01$，** $p<0.05$，* $p<0.1$。

附表 3　用分类衡量的教育减负政策对教育产出的影响

变量	OLS		Probit	
	(1)	(2)	(3)	(4)
经历强减负政策	0.042	−0.304**	0.038	−0.302**
	(0.031)	(0.144)	(0.114)	(0.524)
ln（家庭收入）×经历强减负政策	—	0.039**	—	0.038**
		(0.016)		(0.058)
ln（家庭收入）	0.001	−0.020*	0.001	−0.021*
	(0.009)	(0.012)	(0.033)	(0.046)

（续表）

变量	OLS		Probit	
	(1)	(2)	(3)	(4)
居住于城市地区	0.004	0.005	0.005	0.007
	(0.020)	(0.020)	(0.072)	(0.072)
男性	0.017	0.017	0.019	0.019
	(0.017)	(0.017)	(0.062)	(0.062)
父亲受教育年限	0.002	0.002	0.003	0.003
	(0.003)	(0.003)	(0.014)	(0.014)
母亲受教育年限	−0.002	−0.001	−0.002	−0.002
	(0.003)	(0.003)	(0.013)	(0.013)
初中就读重点班的情况（基准组：初中学校不区分重点班）				
初中就读于非重点班	−0.020	−0.020	−0.018	−0.018
	(0.020)	(0.020)	(0.069)	(0.069)
初中就读于重点班	0.104***	0.105***	0.123***	0.142***
	(0.022)	(0.022)	(0.103)	(0.103)
观测值个数	2 235	2 235	2 234	2 234
R-squared	0.050	0.053		

注：回归还控制了省份和毕业年份固定效应；Probit 模型报告的是边际效应；括号中为稳健标准误；*** $p<0.01$，** $p<0.05$，* $p<0.1$。

附表 4　用分类指标衡量的减负政策对教育投入的影响

变量	ln（教育支出）		学习时间		ln（教育支出）
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
经历强减负政策	−0.146	−1.872***	2.205	−33.33***	0.653
	(0.108)	(0.616)	(2.935)	(10.06)	(0.551)
ln（家庭收入）×经历强减负政策	—	0.201***	—	4.247***	0.230***
		(0.072)		(1.151)	(0.063)
ln（家庭收入）	0.002	−0.151**	1.140*	−1.456	−0.162***
	(0.035)	(0.066)	(0.610)	(0.929)	(0.059)
ln（前期校外教育支出）×减负指数	—	—	—	—	−0.436***
					(0.021)
ln（前期校外教育支出）	—	—	—	—	−0.087***
					(0.016)
就读重点班的情况（基准组：学校不区分重点班）					
学生就读于非重点班	0.006	0.005	0.107	0.322	0.043
	(0.086)	(0.086)	(1.658)	(1.648)	(0.080)
学生就读于重点班	0.061	0.066	2.619	2.808	0.096
	(0.139)	(0.139)	(2.083)	(2.070)	(0.130)

（续表）

变量	ln（教育支出）		学习时间		ln（教育支出）
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
目前就读年级（基准组：小学低年级）					
小学高年级	−0.135	−0.140	15.92**	16.69**	−0.077
	(0.172)	(0.172)	(6.889)	(6.846)	(0.175)
初中	0.300	0.303	20.98***	21.72***	0.346
	(0.230)	(0.229)	(7.227)	(7.180)	(0.216)
观测值个数	9 479	9 479	3 833	3 833	9 353
R-squared	0.168	0.169	0.083	0.097	0.306
追踪个体数	5 383	5 383	2 902	2 902	5 351

注：家庭收入为滞后一期的值；回归还控制了个体和时间固定效应；括号中为稳健标准误；*** $p<0.01$，** $p<0.05$，* $p<0.1$。

注：该附录是期刊所发表论文的组成部分，同样视为作者公开发表的内容。如研究中使用该附录中的内容，请务必在研究成果上注明附录下载出处。