第 5 卷第 1 期
2005 年 10 月

经济学（季刊）
China Economic Quarterly

Vol.5，No.1
October，2005

期望效用理论与前景理论的一致性

边 慎 蔡志杰*

摘 要 经济中存在着大量的不确定性，人们在不确定情况下的决策行为是公司资本结构、期权定价等问题的理论基础。自从冯·诺伊曼和摩根斯坦的经典著作《博弈论和经济行为》问世以来，期望效用理论一直被奉为理性人在不确定情况下进行决策的准则，在期望效用理论的基础上，建立起了资本资产定价模型、有效市场等一系列经济理论。然而随着实验经济学的发展，经济学家发现人们在实际决策中会出现一些违反期望效用准则的“异象”。1979 年，卡尼曼和特沃斯基的论文“前景理论”，解释了这些“异象”，并成为行为金融学的理论基础。本文在介绍这两种理论主要思想的基础上证明，在一个理性人应当遵循的代数结合律公理的条件下，前景理论和期望效用理论的结论是一样的。

关键词 期望效用理论，前景理论，代数结合律公理

一、期望效用理论

经济生活中存在着大量的不确定性，在实际的经济决策中，不确定情况下决策的数量远远超过了确定情况下的决策，因而一直是经济学家潜心研究的课题之一。

基于序数效用论和无差异曲线的消费者行为理论和显现偏好理论完整地描绘了理性人在确定性情况下的决策行为，指出了理性人决策的三条基本公理：一是偏好完整性公理，即对任意的两种商品 A、B，理性人具有明确的偏好，或者 A 好于 B，或者 B 好于 A，或者两者无差异；二是偏好传递性公理，即对任意的三种商品 A、B、C，如果理性人认为 A 好于 B、同时 B 好于 C，那么他一定认为 A 好于 C；三是效用最大化公理，即理性人总是选择对他来说效用最大的商品。

在不确定情况下的决策问题中，一个备选方案称为前景（prospect），通常是以 p_i 的概率（probability）获得 x_i 的资产（$i=1，2，\cdots，n$），其中 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$。如果把一个备选方案看作一个整体，那么在多个备选方案之间进行选择的依据和确定性情况下的决策是一样的，符合上述的三条公理，理性人将会选择具有最大效用的备选方案。然而由于资产 x_i 的效用可以用$U(x_i)$

* 边慎，华东师范大学金融系 蔡志杰，复旦大学数学科学学院。通讯作者及地址 边慎，华东师范大学金融系，200062；电话：13641616384；E-mail：catherine_bian@yahoo.com.cn。

表示，因此经济学家希望可以找到某种方法用 $U(x_i)$ 和相应的概率 p_i 来表示前景的效用。

von Neumann 和 Morgenstern 在他们的经典著作 *Theory of Games and Economic Behavior* 中以严格的数学证明得出前景的效用满足

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i)^{1}. \tag{1}$$

由于这个公式的形式和数学期望的形式一致，因而被称为期望效用理论（Expected Utility Theory，EUT）。期望效用理论定义了不确定情况下前景效用的计算方法，描述了人们在不确定情况下的决策行为，以其简洁明了的形式和良好的拓展性在各种风险决策理论中占据了主导地位，给出了理性人在不确定情况下的行为准则。因为期望效用理论是从一系列的公理推导所得，所以属于规范性决策理论。

Markowitz 是期望效用理论的支持者，他在 1952 年提出的资产组合理论以期望效用理论为基础。他认为："我们认为投资者把预期收益看作有利的……这条规则有许多优点，即使有关投资行为的准则，也是合理前提。"（Markowitz，1952）

在后来出版的 *Portfolio Selection*：*Efficient Diversification of Investment* 一书中，虽然 Markowitz 举出了几个违反期望效用理论的例子，但仍然认为期望效用是理性人进行风险决策的准则。之后，Sharpe 的资本资产定价模型（CAPM）和 Ross 的套利定价模型（APT）相继出现，Fama 的有效市场理论和 Black-Scholes 的期权定价公式使得基于 EUT 的现代投资理论日臻完美。

这些理论的基本前提假设是：(1) 信息是完全的；(2) 人是理性的。

行为金融学家认为在现实世界中这两条基本假设是不可能成立的。首先由于种种原因，信息的传递并非畅通无阻，人们只能获得一部分信息。其次，即使信息是完全的，由于人的认知能力有限，对信息的处理也不可能是充分的，会存在这样那样的偏差，并且受到各人的行为习惯和心理特点的影响，使得人们的行为表现出种种"非理性"的迹象。这些系统地违反期望效用准则的非理性行为（irrational behavior）被称为"异象（anomaly）"。

本文第二部分概括了行为金融学的理论基础——前景理论，同时对期望效用理论和前景理论进行比较。

二、前景理论

普林斯顿大学的心理学教授 Kahneman 在 1979 年与 Tversky 合作发表的

---

[1] 为了使本文符号一致，不至于引起读者的混乱，所以采用统一的符号 $\sum p_i x_i$，表示以 p_i 的概率获得 x_i 的资产，这样一个组合，并非指 p_i 与 x_i 之间的四则运算关系。

论文 *Prospect*[2] *Theory*：*An Analysis of Decision under Risk* 中用一系列的实验结果描述了一些普遍存在的“异象”，并认为前景理论可以解释这些“异象”：

“人们选择风险资产的某些行为普遍违反了期望效用理论的基本原则。……本文提供了一个不同的理论（前景理论），其中价值函数的自变量是收益和损失而不是最终资产，决策权重替代了概率。一般情况下，出现收益时，价值函数是凹的，出现损失时，价值函数是凸的，并且左半部分比右半部分陡峭。决策权重一般小于相应的概率，除了在小概率的情况下，人们一般会高估小概率”。

前景理论使用价值函数（value function）来代替传统的效用函数（utility function），其基本模型是，当面对一个以概率 p 得到 x，以概率 q 得到 y 的风险资产 A 的时候，他从中得到的效用可以用价值函数 $V(px+qy)$[3] 来表示

当 $p+q<1$ 或 $x\geqslant 0\geqslant y$ 或 $x\leqslant 0\leqslant y$ 时，

$$V(px+qy)=\pi(p)v(x)+\pi(q)v(y);\tag{2}$$

当 $p+q=1$ 且 $x>y>0$ 或 $x<y<0$ 时，

$$V(px+qy)=v(y)+\pi(p)[v(x)-v(y)].\tag{3}$$

当 x 为确定性资产的时候，$V(x)=v(x)$，π 函数被称为决策权重函数（decision weighting function），表示人们对客观概率的主观评价，反映了概率对前景价值的影响。同时，人们的行为仍然遵循效用最大化原则，也就是选择效用最大的前景。

价值函数图像如图 1 所示，纵轴表示价值（value），实际上就是从前景中得到的效用（utility）。Kahneman 认为价值函数和效用函数的不同之处有两点，首先价值函数的自变量是盈利（gains）和损失（losses），人们在面对盈利的时候是风险厌恶的（价值函数曲线上凸），面对损失的时候是风险爱好的（价值函数曲线下凸）；期望效用函数的自变量是最终财富（final assets），并且理性人总是风险厌恶的。而事实上从 von Neumann 的证明中可以看到[4]，公式（1）中的 x_i 并非特指最终资产，而仅仅指备选方案，即 Kahneman 所说的前景，根据实际应用目的，既可以定义为损益，也可以定义为最终资产。之所以常常被定义为最终资产，是为了在效用函数中反映人们在不同的财富水平下对待风险的不同态度，也就是说效用函数曲线并不总是上凸或下凸的。Kahneman 所考察的情况，是人们在当前财富水平下对风险的态度，相当于在

[2] Prospect Theory 通常译为“前景理论”,这里 prospect 即是前景理论中的备选方案。

[3] 价值函数的自变量 $px+qy$ 是一个整体,在这里表示一个风险资产的组合,可参考注 1。本文不涉及风险资产期望的计算。

[4] von Neumann 在 *Theory of Games and Economic Behavior* 第一版中只给出结论,第二版开始才有完整的证明过程。

效用函数中把坐标原点平移至当前财富点所得的那部分曲线。因而从这个意义上说，价值函数是效用函数的一个特例。一个遵循期望效用的理性人的风险态度是由效用函数$U(x)$的形状决定的，上凸效用函数表示风险厌恶，下凸效用函数表示风险爱好，而并非总是风险厌恶的。

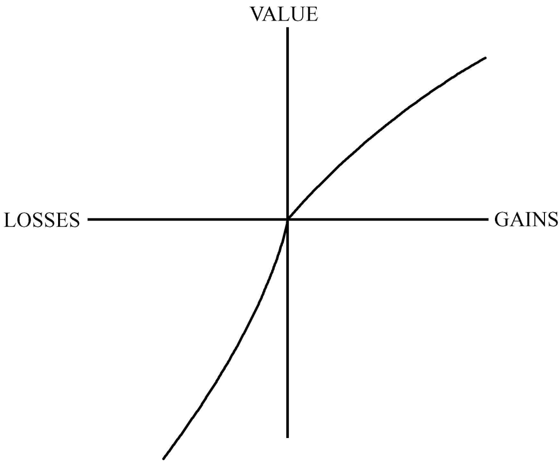

图1

价值函数和期望效用函数的第二个不同之处在于，价值函数使用决策权重来代替期望效用函数中的客观概率。前景理论的一个重要结论是，人们在实际决策过程中对概率的估计值与实际值不符合，一般会高估小概率、低估高概率，同时决策权重之和往往是小于1的。用公式表示就是$\pi(0)=0$，$\pi(1)=1$，当概率p很小时，$\pi(p)>p$；而当概率p很大时，$\pi(p)<p$，Kahneman和Tversky用试验结果说明了$\pi(p)+\pi(1-p)<1$。

本文的第三部分将证明一旦满足代数结合律公理，不论决策权重之和是否等于1，必然可以推出决策权重等于客观概率，即$\pi(p)=p$，于是价值函数的表达式变成

$$V(px+qy)=pv(x)+qv(y),$$

也就是期望效用函数。

在这一部分的最后，有一点必须指出的是：试验经济学所得到的结果只是有限个（而不是足够多）离散的点，并不能推导出一个连续的函数。

三、代数结合律公理
(algebra of combining)

关于前景理论和期望效用理论之间的关系，Levy和Wiener（Levy和Wiener，2002）指出，前景理论描述的是短期行为，而期望效用理论描述的则是长期行为。Levy（Levy和Levy，2004）则通过前景理论与Markowitz的均

值—方差方法在资产组合中的运用，来讨论前景理论与期望效用的关系。本文主要从决策权重的角度研究期望效用理论和前景理论的一致性。

无论决策权重函数采取什么样的形式，人们对客观概率的评价总是会满足一些基本的公理。比方说，如果客观概率是 0.1，决策权重决不会大于 0.5，反之，如果客观概率是 0.9，决策权重也绝不会小于 0.5。接下来我们要介绍代数结合律公理[5]，并证明正是这条公理使得决策权重必然等于客观概率。

Kahneman 和 Tversky（1979）根据实验得出一个违反代数结合律公理的现象，他们称之为 isolation effect。但 Kahneman 所做的实验实际上属于两阶段决策，在这个实验中受试者做出的是中间决策。两阶段决策实质上不同于单阶段决策，而代数结合律公理只是针对单阶段决策，因而不能说明代数结合律公理是不成立的。由于本文承认代数结合律公理，并在此前提下给出证明，所以有必要对 isolation effect 做出说明。

Kahneman 和 Tversky 所做的实验（problem 10，Kahneman 和 Tversky，1979）如下：考虑一个两阶段游戏[6]，在第一个阶段有 0.75 的可能性得不到任何奖金并结束游戏，有 0.25 的可能性进入第二阶段。如果到达了第二阶段，那么受试者将面临两个选择，一个是 100% 获得 3000 的前景 $(3000，1)_2$[7]，一个是以 0.8 的概率获得 4000 的前景 $(4000，0.8)_2$。选择必须在游戏开始前做出。

该游戏的决策树如图 2 所示（圆节点表示概率，方节点表示选择），在参加试验的 141 个受试者中 78% 选择了 $(3000，1)_2$。

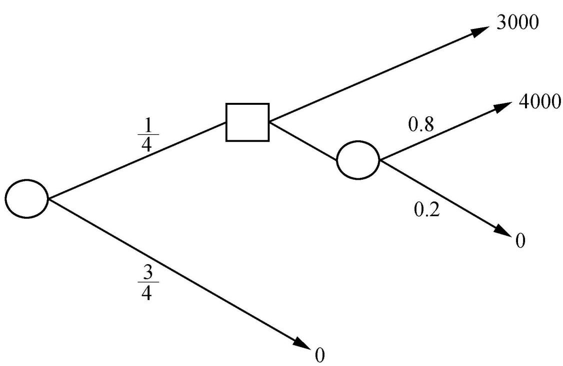

图 2

[5] 最初由 von Neumann(1953)提出。

[6] 原文为 game，考虑到这并不是一个完全意义上的博弈问题，故译为"游戏"。

[7] 用下标 2 表示这是在第二阶段的概率。

比较他们做的另两个试验：

实验1：在两个风险前景（4000，0.20）和（3000，0.25）之间选择(problem 4，Kahneman 和 Tversky，1979)。95个受试者中有65%选择了(4000，0.20)。

实验2：在两个风险前景(4000，0.80）和（3000，1)之间选择（problem 3，Kahneman 和 Tversky，1979)。95个受试者中有80%选择了（3000，1)。

Kahneman 和 Tversky 认为，如果 algebra of combining 公理成立，两阶段游戏就相当于这样两个前景$\left(3000，1\times\frac{1}{4}\right)$和$\left(4000，0.8\times\frac{1}{4}\right)$，即（3000，0.25）和（4000，0.20)，和实验1相同，也就是说大部分的受试者应该选择$(4000，0.8)_2$。然而实验显示大部分受试者选择了$(3000，1)_2$，这个矛盾表明代数结合律公理不成立。

实际上，Kahneman 和 Tversky 的这个实验误导了受试者，他们实际上是在（4000，0.80）和（3000，1）之间选择（即他们所做的是两阶段决策中的中间决策)，而并非在（4000，0.20）和（3000，0.25）之间选择，理所当然地得到了与实验2相同的结果。

为了更清楚地阐述决策者在 Kahneman 的实验10中所做出的是中间决策，来看另一个两阶段试验：在第一个阶段有0.75的概率得到1000并结束游戏，有0.25的可能性进入第二阶段。在第二阶段，有两个选择，一个是100%获得3000的前景$(3000，1)_2$，一个是以0.8的概率获得4000的前景$(4000，0.8)_2$。显然，这个两阶段试验与 Kahneman 两阶段试验惟一的不同之处在于，第一阶段有0.75的概率得到1000，在 Kahneman 的实验中则是0。

下面用两种不同的方式要求受试者做出选择（决策树中的方块表示决策点，注意在两种方式中，方块的不同位置)，并比较其区别：

(1) 在游戏开始前，受试者必须在3000，4000，1000这三种可能的奖金中做出选择。然后游戏开始，如果最终的奖金数与受试者的选择相同，那么他可以赢得奖金。用决策树图3表示如下：

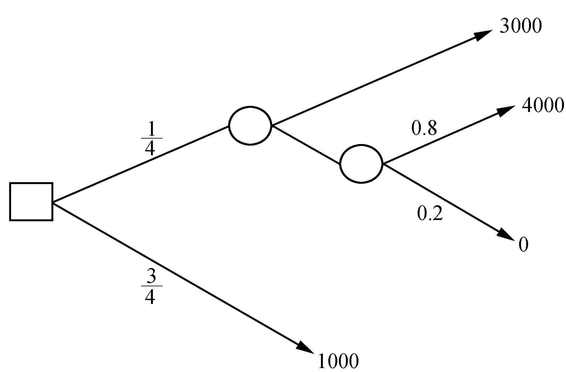

图3

图 3 与图 2 有两处不同，一是在第一阶段，图 3 有 0.75 的概率获得 1000，图 2 有 0.75 的概率获得 0，二是方节点（决策点）的位置不同。

图 3 表达的意思是，在游戏开始前，① 受试者选择 1000：如果第一阶段的游戏结果是 1000（0.75 的概率），那么他可以获得奖金；如果第一阶段的结果是继续进行游戏（0.25 的概率），那么游戏结束，受试者什么都没有得到。② 受试者选择 3000：如果第一阶段的游戏结果是 1000（0.75 的概率），那么游戏结束，受试者什么都没有得到；如果第一阶段的结果是继续进行游戏（0.25 的概率），那么受试者得到 3000。③ 受试者选择 4000：如果第一阶段的游戏结果是 1000（0.75 的概率），那么游戏结束，受试者什么都没有得到；如果第一阶段的结果是继续进行游戏（0.25 的概率），那么进入第二阶段的抽签，受试者有 0.8 的概率得到 4000，有 0.2 的概率什么都得不到。

显然，受试者面临三个风险前景 $\left(3000, 1\times\frac{1}{4}\right)$，$\left(4000, 0.8\times\frac{1}{4}\right)$，$\left(1000, \frac{3}{4}\right)$，即（3000，0.25），（4000，0.2），（1000，0.75）。决策在游戏开始前做出（方节点），对受试者来说，没有中间决策（游戏开始后，不允许受试者再作决策，反映在决策树中，即只有一个方节点），他所做的实际上是单阶段决策（方节点在最前面）。这是 von Neumann 的 Algebra of Combining 公理所描述的情况。

（2）采用和 Kahneman 实验 10 相同的表述方法，如果到达了第二阶段，那么受试者将面临两个选择，一个是 100% 获得 3000 的前景 $(3000, 1)_2$，一个是以 0.8 的概率获得 4000 的前景 $(4000, 0.8)_2$。选择必须在游戏开始前做出。用决策树图 4 表示如下：

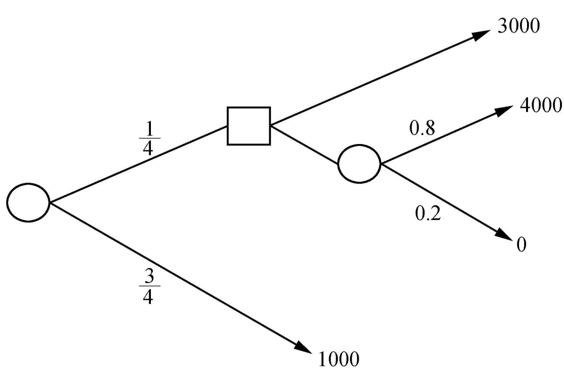

图 4

图 4 和图 2 惟一的不同之处在于，图 4 有 0.75 的概率获得 1000，而图 2 有 0.75 的概率获得 0。

图 4 表达的意思是，在游戏开始前，① 受试者选择 3000：如果第一阶段的游戏结果是 1000（0.75 的概率），那么游戏结束，受试者什么都没有得到；

如果第一阶段的结果是继续进行游戏(0.25 的概率),那么受试者得到 3000。② 受试者选择 4000:如果第一阶段的游戏结果是 1000(0.75 的概率),那么游戏结束,受试者什么都没有得到;如果第一阶段的结果是继续进行游戏(0.25 的概率),那么进入第二阶段的抽签,受试者有 0.8 的概率得到 4000,有 0.2 的概率什么都得不到。方节点在第一阶段结束之后,第二阶段开始之前,这是两阶段之间的中间决策,也就是 Kahneman 试验 10 描述的情况。注意到 1000 是第一阶段游戏的结果,而决策是在第一阶段结束时才作出的,也就是 1000 被排除在决策作考虑的对象之外了。

所以,受试者是在进入第二阶段的前提下,面临(3000,1)和(4000,0.8)两个风险前景,而非$\left(3000,1\times\frac{1}{4}\right)$和$\left(4000,0.8\times\frac{1}{4}\right)$。即,受试者是在面临二阶段试验的情况下,针对此一阶段的实验,做出中间决策(方节点在中间)。

由于 Kahneman 二阶段游戏在第一个阶段是以 0.75 的概率获得 0,其中的差别很容易被忽视,也就导致了错误的结论。既然 Kahneman 的实验 10 说明的是中间决策过程,而代数结合律公理是针对单阶段决策。综上所述,不能据此认为受试者的决策行为系统违反了代数结合律公理。

本文假设代数结合律公理成立,并在此基础上证明决策权重函数是恒等映射。

下面是以数学公式表示的代数结合律公理:

$$\begin{aligned}(1-\gamma)[(1-\alpha)u_0+\alpha v_0]+\gamma[(1-\beta)u_0+\beta v_0]\\=[(1-\gamma)(1-\alpha)+\gamma(1-\beta)]u_0\\+[(1-\gamma)\alpha+\gamma\beta]v_0.\end{aligned}\tag{4}$$

这个公式的右边表示这样一个前景:以$(1-\gamma)(1-\alpha)+\gamma(1-\beta)$的概率获得 u_0、$(1-\gamma)\alpha+\gamma\beta$ 的概率获得 v_0。左边表示这样一个前景:以 $1-\gamma$ 的概率获得 A、γ 的概率获得 B,其中 A 是一个以概率 $1-\alpha$ 获得 u_0、α 获得 v_0 的前景,B 是一个以概率 $1-\beta$ 获得 u_0、β 获得 v_0 的前景,这种类型的前景称为复合前景(compound prospect)。可以认为复合前景是先抽签决定得到 A 或 B,在此基础上再抽一次签决定得到 u_0 或 v_0,但是这两个步骤是在很短的时间内完成的,中间过程的效用为 0。也就是说,对面临这样一个复合前景的决策人来说,他做选择之前就了解,选择之后他所知道的只是获得 u_0 或 v_0 的最终结果,中间过程极其短暂并且对他是保密的。因而对任何一个具备基础概率论知识的决策人来说,这两个前景是完全一样的。

本文所要证明的结论是,对一个以 $1-\alpha$ 的概率得到 u,α 的概率得到 v 的风险资产 w(记为 $w\sim(1-\alpha)u+\alpha v$),如果满足代数结合律公理,则前景理论中的决策权重函数 $\pi(\alpha)$ 是恒等映射,即 $\pi(\alpha)=\alpha$。

证明：

1° **对第一种情况，即式（2），w 的效用可以写成**

$$f(w)=\pi(1-\alpha)f(u)+\pi(\alpha)f(v) \tag{5}$$

的形式，其中 $f(w)$ 表示 w 的效用，那么 $\pi(\alpha)=\alpha$。

给定 u_0、v_0，假设 $f(u_0)=0$，$f(v_0)=1$，那么对任意 α、β（$0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$），记

$$u_1\sim(1-\alpha)u_0+\alpha v_0,\quad v_1\sim(1-\beta)u_0+\beta v_0,$$

则由（5）式，可得

$$f(u_1)=\pi(1-\alpha)f(u_0)+\pi(\alpha)f(v_0)=\pi(\alpha), \tag{6}$$

$$f(v_1)=\pi(1-\beta)f(u_0)+\pi(\beta)f(v_0)=\pi(\beta). \tag{7}$$

又设对任意 γ（$0\leqslant\gamma\leqslant 1$），记

$$w\sim(1-\gamma)u_1+\gamma v_1,$$

由（5）式，并利用（6）式、（7）式，可得

$$\begin{aligned} f(w)&=\pi(1-\gamma)f(u_1)+\pi(\gamma)f(v_1)\\ &=\pi(1-\gamma)\pi(\alpha)+\pi(\gamma)\pi(\beta). \end{aligned} \tag{8}$$

而由 u_1，v_1 的定义，并由代数结合律公理可得

$$\begin{aligned} w&\sim(1-\gamma)u_1+\gamma v_1\\ &=(1-\gamma)[(1-\alpha)u_0+\alpha v_0]\\ &\quad+\gamma[(1-\beta)u_0+\beta v_0]\\ &=[(1-\gamma)(1-\alpha)+\gamma(1-\beta)]u_0\\ &\quad+[(1-\gamma)\alpha+\gamma\beta]v_0. \end{aligned}$$

由（5）式

$$\begin{aligned} f(w)&=\pi((1-\gamma)(1-\alpha)+\gamma(1-\beta))f(u_0)\\ &\quad+\pi((1-\gamma)\alpha+\gamma\beta)f(v_0)\\ &=\pi((1-\gamma)\alpha+\gamma\beta). \end{aligned} \tag{9}$$

综合（8）式、（9）式，得对任意的 α，β，$\gamma\in[0,1]$，有

$$\pi((1-\gamma)\alpha+\gamma\beta)=\pi(1-\gamma)\pi(\alpha)+\pi(\gamma)\pi(\beta). \tag{10}$$

根据前景理论，$\pi(0)=0$，$\pi(1)=1$。

在（10）式中取 $\alpha=0$，得

$$\pi(\gamma\beta)=\pi(\gamma)\pi(\beta), \tag{11}$$

因此存在实数 k，使得（参见附录）

$$\pi(\alpha)=\alpha^k, \tag{12}$$

代入（10）式得

$$[(1-\gamma)\alpha+\gamma\beta]^k=(1-\gamma)^k\alpha^k+\gamma^k\beta^k,\tag{13}$$

在（13）式中取 $\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，得

$$\left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^k=2\frac{\alpha^k\beta^k}{(\alpha+\beta)^k},$$

即 $2^k=2$，故 $k=1$。因此

$$\pi(\alpha)=\alpha.\tag{14}$$

2° 对第二种情况，即当 $p+q=1$ 且 $x>y>0$ 或 $x<y<0$，

$$V(px+qy)=v(y)+\pi(p)[v(x)-v(y)].$$

由于决策权重函数的性质是从（2）式的正常情况归纳出的，所以本文仅针对（2）式加以证明。

综上所述，无论决策权重之和是否等于1，只要满足代数结合律公理，决策权重必然等于客观概率，因此，前景理论所建模型实际上就是期望效用函数。

附录 （11）式的证明

若函数 $f(x)$ 满足：对任意的 x，$y\in[0,1]$ 成立

$$f(x,y)=f(x)f(y)\tag{15}$$

且 $f(x)$ 不恒等于0，则 $f(x)$ 必是幂函数，即存在实数 k，使得

$$f(x)=x^k.\tag{16}$$

证明：记 $F(x)=f(\mathrm{e}^x)$，则

$$\begin{aligned}F(x+y)&=f(\mathrm{e}^{x+y})=f(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)\\&=f(\mathrm{e}^x)f(\mathrm{e}^y)=F(x)F(y),\end{aligned}\tag{17}$$

故

$$F(x)=F\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\geqslant 0.$$

由于 $F(x)$ 不恒等于0，故存在 x_0，使得 $F(x_0)>0$，于是

$$F(x_0+0)=F(x_0)F(0),$$

即 $F(0)=1$。

由（17）式，对任意整数 m，n，有

$$F(mx)=(F(x))^m,\quad F(x)=\left(F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n,$$

故

$$F\left(\frac{x}{n}\right)=(F(x))^{\frac{1}{n}},\quad F\left(\frac{m}{n}x\right)=(F(x))^{\frac{m}{n}}.\tag{18}$$

对任意的实数 c，存在有理数列 $p_j\to c$（$j\to\infty$），由（18）式，得

$$F(p_jx)=(F(x))^{p_j}.$$

令 $j\to\infty$，得

$$F(cx) = (F(x))^c.$$

令 $x=1$，得$F(c)=(F(1))^c$，即 $F(x)=(F(1))^x$。记 $F(1)=a$ ，有

$$f(e^x) = F(x) = a^x.$$

再令 $y=e^x$，则

$$f(y) = a^{\ln y} = (e^{\ln a})^{\ln y} = y^{\ln a}.$$

记 $k=\ln a$，则

$$f(x) = x^k.$$

参考文献

[1] Haim Levy and Zvi Wiener，" Prospect Theory and Utility Theory：Temporary versus Permanent Attitude towards Risk "，Working Paper，2002.

[2] Harry Markowitz，" Portfolio Selection "，*Journal of Finance*，1952，7 (1)，77—93.

[3] Harry Markowitz，*Portfolio Selection：Efficient Diversification of Investment*. Blackwell，1991.

[4] Kahneman，Daniel and Amos Tversky，" Prospect Theory：An Analysis of Decision under Risk "，*Econometrica*，1979，47 (2)，263—292.

[5] Knight，Frank H.，*Risk，Uncertainty，and Profit*. Boston，MA：Hart，Schaffner & Marx；Houghton Mifflin Company，1921.

[6] Haim Levy and Moshe Levy，" Prospect Theory and Mean-Variance Analysis "，*Review of Financial Studies*，2004，17(4)，1015—1041.

[7] von Neumann，John and Oskar Morgenstern，*Theory of Games and Economic Behavior*，3rd edition. Princeton University Press，1953.

Consistency of the Prospect Theory and the Expected Utility Theory

SHEN BIAN

(*East China Normal University*)

ZHIJIE CAI

(*Fudan University*)

Abstract　The expected utility theory (EUT) has dominated the theory of decision under risk since the publication of von Neumann and Morgenstern's distinguished monograph " *Theory of Games and Economic Behavior* ". But human behavior that violates the EUT axiom has continually been detected. In a prominent paper " *Prospect Theory：An analysis of Decision under Risk* "，Kahneman and Tversky summarized the main violations and generalized a descriptive model to explain these anomalies. This paper presents a proof that under the axiom of the algebra of combination, these two theories are exactly identical.

JEL Classification D81, D80, C60