第 5 卷第 2 期 2006 年 1 月
经济学（季刊）China Economic Quarterly
Vol. 5, No. 2 January, 2006

异质性财富偏好和资产定价*

陈彦斌　周业安

摘　要　Bakshi 和 Chen（1996）在代表性投资者经济中提出了基于财富偏好的资产定价模型。本文研究了在异质性投资者经济中财富偏好对资产定价的影响。如果风险资产的价格服从几何布朗运动，那么资产市场具有两基金分离现象。本文首先证明了基于风险基金的资产定价模型，然后使用该模型证明了如果定价的基准是单个的投资者的最优消费和财富时，那么基于财富偏好的资产定价模型成立。但是，当定价的基准是总消费和总财富时，基于财富偏好的资产定价模型不能成立。也就是，不能在异质投资者经济中将 Breeden（1979）的经典 CCAPM 模型推广到包含财富偏好的资产定价模型。

关键词　异质性偏好，财富偏好，资本资产定价模型

一、引　　言

20 世纪 60 年代，Sharpe、Linter and Mossin 建立了资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model，简称 CAPM 模型），将每一种风险资产的期望超额收益率表示为，该风险资产的 Beta 系数与市场组合的期望超额收益率的乘积。CAPM 模型描述了资产的收益与风险之间的线性关系，是测量风险和估价资产的基准和衡量投资绩效的标准。但是，Roll（1977）指出，因为不存在真实的市场组合，所以资本资产定价模型永远不能被证实或证伪。因此，资本资产定价模型不应被视为适于资产定价的完美模型。

由于可以公开得到总消费数据，所以 Breeden（1979）提出了基于消费的资产定价模型（Consumption-based Capital Asset Pricing Model，简称 CCAPM 模型）。Breeden 的 CCAPM 模型有三个基本假定。首先，假定经济中存在多个投资者，投资者的偏好各不相同，从而经济中的总消费等于各个消费投资者的消费总和。其次，假定每个投资者的偏好由基于当前消费的效用函数表达。最后，假定经济中存在一种无风险资产和多种风险资产。无风险利率为常数，风险资产的价格服从几何布朗运动，即风险资产的收益率服从正态分布，并且均值和方差均为固定不变的常数[1]。

---

* 中国人民大学经济学院。通讯作者及地址：陈彦斌，中国人民大学经济学院，100872；电话：010-88862268；E-mail：cyb@ruc.edu.cn。本文得到国家自然科学基金资助（项目号：70373018，70403020，70440003）。作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见，当然，文责自负。

[1] 当前的资产定价理论主要是修改这三个基本假定而发展起来的。比如，Constantinides（1990）修改了第一个和第二个假定，在代表性投资者经济中引入了习惯形成；Merton（1973）修改了第三个假定，假定无风险利率是时间的函数，从而证明了基于三基金分离的 CCAPM 模型；等等。

CCAPM 模型描述了资产的收益与风险之间的线性关系，将每一种风险资产的期望超额收益率表示为，该风险资产收益率与总消费增长率的协方差，乘以经济中所有投资者的相对风险规避系数的加权调和平均值。CCAPM 模型的提出是金融学的一次重大飞跃，将金融学和经济学有机地结合起来，具有巨大的理论价值，在现代资产定价理论中有着巨大的影响。但是，CCAPM 模型不能解释著名的股票溢价之谜、无风险利率之谜和消费平滑之谜等实证难题[2]。

Bakshi and Chen（1996）将财富偏好引入了资产定价理论。财富偏好是指，除了消费之外，投资者的财富也是效用函数中的变量。也就是说，投资者不但通过享受其消费品，而且通过占有财富，而得到效用。一般说来，财富的边际效用大于 0。[3] Bakshi and Chen 的模型修改了 Breeden 的 CCAPM 模型的三个基本假定。首先，假定经济中所有投资者的偏好是相同的，即代表性投资者经济，从而代表性投资的个人消费可以表示经济中的总消费，个人财富也可以表示经济中总财富。其次，假定代表性投资者的效用函数含有财富，即财富偏好。最后，假定风险资产的价格服从一般的 Ito 过程，即风险资产的对数收益率服从正态分布，但均值和方差不再是常数，而随时间和资产的价格的变化而变化。这三个假定中，第一个弱化了 Breeden 的 CCAPM 模型的相关假定，第三个却加强了 CCAPM 模型的相关假定。

Bakshi and Chen 提出了基于财富偏好的资本资产定价模型，该模型也给出了资产的收益和风险之间的线性关系：风险资产的期望数额收益率等于其消费风险乘以某系数，加上其财富风险乘以某系数，其中两个系数仅依赖于效用函数、消费以及财富。但与 CCAPM 模型不同的是，在该模型中，资产的风险有两种不同的表现形式；一种是消费风险，定义为资产收益率和总消费收益率之间的协方差；另一种是财富风险，定义为资产的收益率和总财富增长率之间的协方差。

在基于财富偏好的资本资产定价模型中，出现了财富风险一项，是合乎逻辑的。这与投资者效用函数的假定是一致的。由于投资者的财富进入了其效用函数，所以投资者不仅关心其消费，而且关心其财富。如果某风险资产的收益率与财富的增长率正相关，那么持有该资产，将会增大投资者的财富

---

[2] 为了解释这些实证难题，最近十几年来资产定价理论获得了巨大的发展，在 CCAPM 模型的基础之上提出了许多新的模型，比如引入了财富偏好、习惯形成、递归效用等更加接近现实的效用函数，还引入了生产、投资和通货膨胀等更为一般的经济模型等。

[3] 财富偏好与货币理论中的 MIU（Money in Utility，效用函数中的货币）是不同的两个概念。MIU 是指，投资者的消费和所持有的实际货币余额是效用函数中的两个变量。引入 MIU，是为了让货币具有价值。Kurz（1968）首次将财富偏好引入效用函数，不过他的具体做法是将资本存量引入效用函数。Zou（1994，1995，1998）则开始了对财富偏好的现代研究，将之称为资本主义精神（The Spirit of Capitalism）。Zou 将财富偏好引入了增长理论，用以解释经济的增长和资本的积累。Smith（2001）在 Bakshi 和 Chen 基础之上，研究了财富偏好影响资产价格的方式。

的波动性，进而降低投资者的效用水平。因此，只有当该风险资产具有正的风险溢价时，投资者才愿意持有。特别地，如果资产的收益率与投资者的财富增长率正相关，那么将会增加该资产的溢价。Bakshi and Chen 使用该理论解释 Mehra and Prescott（1985）提出的股票溢价之谜。

一个自然的问题是：Bakshi and Chen 的基于财富偏好的资本资产定价模型，在异质性投资者经济条件下，仍然成立吗？如果答案是否定的，那就说明该模型具有严重的内在缺陷。由于 CAPM 和 CCAPM 模型都建立在异质投资者经济之上，所以建立在代表性投资者经济之上的基于财富偏好的资本资产定价模型，并不是对 Breeden 的 CCAPM 的一脉相承的发展。因此，使用该模型对股票溢价之谜的解释，是无法令人信服的。进而，在 Bakshi and Chen 基础之上发展起来的许多模型（如 Smith，2001 等）都需要重新研究和审视。

本文的目标是，研究 Bakshi and Chen 的基于财富偏好的资本资产定价模型是否可以推广到不同偏好投资者经济。为了研究的便利，本文对 Bakshi and Chen 的假定作如下的修正。首先，假定投资者的效用函数为基于其绝对财富一般的效用函数。一方面，效用函数为一般化的财富偏好，而不采用幂函数等特殊的形式；另一方面，去除了相对财富的概念，减少了社会平均财富变量，从而简化了模型。其次，假定风险资产的价格服从几何布朗运动，这有两方面的考虑。一方面，与 CCAPM 的模型保持一致。另一方面，利用几何布朗运动，只要证明了两基金分离定理在财富偏好下仍然成立，就可以使用基于风险基金的 CAPM 模型，研究本文所讨论的问题。本文采用这两点修正，不完全是为了方便求解，同时也是出于自然的考虑：如果在最基本和最简单的情形下，基于财富偏好和资本资产定价模型在异质投资者经济都无法成立，那么在更为复杂的情形下，该模型也不会成立。

本文的结构如下。第二节给出本文模型的基本假定；第三节证明当投资者具有财富偏好时，如果风险资产的价格服从几何布朗运动，那么资产市场就会有两基金分离现象，第四节证明风险基金的价格服从几何布朗运动，并给出风险基金的期望收益率和波动率之间的关系；第五节证明当经济中的投资者的效用函数为财富偏好时，基于风险基金的 CAPM 模型成立；第六节使用基于风险基金的 CAPM 模型，证明对于单个投资者的基于财富偏好的资本资产定价模型；第七节证明在异质者投资者经济中，基于财富偏好的资本资产定价模型不能成立；第八节是全文的结论。

二、假　　定

本文考虑一个连续时间的资产市场经济，经济中只有一种商品，它要么用来消费，要么用来投资于风险资产，投资的回报也是该商品。该经济进一

步定义如下。

（一）偏好

经济中存在 K 个偏好不同的无限存活的投资者。投资者 q 在 t 时有财富 $W^q(t)$，希望使用该财富最大化期望终身总效用，

$$E_t\left\{\int_t^{\infty} U^q(c^q(s),W^q(s),s)\mathrm{d}s\right\},\quad q=1,2,\cdots,K. \tag{1}$$

此处记号 E_t 表示条件期望算子，$c^q(s)$表示投资者 q 的 s 时消费率，投资者 q 的效用函数为 $U^q(c^q(t),W^q(t),t)$，不但依赖于消费率和时间，还依赖于其财富。本文假定 $U^q(c^q(t),W^q(t),t)$是三次连续可微的，并满足 $U_c^q\equiv\partial U^q/\partial c^q>0$（增加消费会增加效用）；$U_W^q\equiv\partial U^q/\partial W^q>0$（财富偏好或者资本主义精神：增加财富会增加效用[4]）；$U_{cc}^q\equiv\partial^2 U^q/\partial(c^q)^2<0$ 和 $U_{WW}^q\equiv\partial^2 U^q/\partial(W^q)^2<0$（消费和财富的边际效用递减）。

（二）投资机会

假定存在一个连续交易的资产市场，有 n 种风险资产和一种无风险资产。无风险资产的利率记为 r。假定每份风险资产 i 的 t 时价格为 $P_i(t)$，服从几何布朗运动，即 $\mathrm{d}P_i/P_i=\mu_i\mathrm{d}t+\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)$，其中常数 μ_i 和 σ_i 分别是风险资产 i 收益率的均值和波动率；$B_i(t)$是标准布朗运动。将所有风险资产的价格所服从的几何布朗运动，用矩阵表示为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\mu}\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{B}),$$

其中 $\boldsymbol{P}=(P_1,P_2,\cdots,P_n)^{\mathrm{T}}$ 表示 n 种风险资产的价格向量，记号 T 表示矩阵的转置，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$ 表示 n 种风险资产的期望收益率向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=(\mathrm{d}B_1,\mathrm{d}B_2,\cdots,\mathrm{d}B_n)^{\mathrm{T}}$ 表示风险资产的布朗运动微分向量，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是对角矩阵，对角线上的元对应为每种风险资产的价格，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对角矩阵，对角线上的元对应为每种风险资产的波动率。

定义 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{\Omega}=[\sigma_{ij}]$为 n 种风险资产的收益率的协方差矩阵，此处记号 σ_{ij} 表示风险资产 i 的收益率和风险资产 j 的收益率的协方差，即 $\sigma_{ij}\mathrm{d}t=\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}P_i/P_i,\mathrm{d}P_j/P_j)$。假定协方差阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 是非奇异的，并使用记号 $\boldsymbol{\Omega}^{-1}=[v_{ij}]$ 表示协方差阵的逆矩阵。将风险资产的价格所服从的几何布朗运动，代入协方差 $\sigma_{ij}\mathrm{d}t$，得到协方差与波动率之间的关系为 $\sigma_{ij}\mathrm{d}t=\sigma_i\sigma_j E_t[\mathrm{d}B_i(t)\mathrm{d}B_j(t)]$。

[4] Barberis、Huang and Santos(2001)关于 Prospect Theory 的工作也可以认为是对财富偏好的研究，但不是静态地而是动态地将财富引入投资者的偏好：投资者的效用函数定义在消费和财富的波动之上，从而投资者不但规避消费风险，还规避财富的损失(Loss aversion)。Barberis，Huang and Santos 使用这种新的偏好来研究资产定价。

写成矩阵形式，有如下关系

$$\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}t = E_t[\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}].$$

（三）预算方程

下面给出投资者所面临的预算动态方程，即财富所服从的随机过程。假定投资者没有禀赋和劳动收入，所有收入都来源于所持有的风险资产的资本增值。

因为在瞬间$[t, t+\mathrm{d}t]$内，财富的增加部分 $\mathrm{d}W^q$，等于该段时间内所持有风险资产的增值 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i^q W^q(\mathrm{d}P_i/P_i)$，加上所持有的无风险资产的增值 $(1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i^q)rW^q\mathrm{d}t$，再减去瞬间消费 $c^q(t)\mathrm{d}t$，所以投资者 q 的财富动态方程为如下随机微分方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W^q &= \sum_{i=1}^{n}\omega_i^q W^q(\mathrm{d}P_i/P_i) + (1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i^q)W^q r\mathrm{d}t - c^q(t)\mathrm{d}t \\ &= (\boldsymbol{\omega}^q)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})W^q\mathrm{d}t + (rW^q - c^q)\mathrm{d}t + (\boldsymbol{\omega}^q)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}W^q\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t),\end{aligned} \tag{2}$$

此处 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维全 1 列向量，$\omega_i^q(t)$表示投资者 q 投资在风险资产 i 之上的投资组合权重，并且投资组合 $\boldsymbol{\omega}^q=(\omega_1^q,\omega_2^q,\cdots,\omega_n^q)^{\mathrm{T}}$ 是无约束的，这是因为 $1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i^q$ 是投资在无风险资产上的投资组合权重。

三、财富偏好下的两基金分离

本节证明，如果风险资产的价格服从几何布朗运动，那么资产市场就会有两基金分离现象。从而，复杂的资产市场可以简化为两种资产：一种无风险资产和一种风险资产。

在投资者的消费—投资组合规划问题中，投资者的效用函数中不含有风险资产的价格。当风险资产的价格服从几何布朗运动时，投资者的预算约束动态方程也不包含有风险资产的价格变量。由于规划问题中的目标函数和约束条件都不包含风险资产的价格，所以投资者的消费—投资组合规划问题就与风险资产的价格无关。因此，投资者 q 的控制变量是其消费和投资组合，而投资者 q 在 t 时的状态变量，为其财富 $W^q(t)$和时间 t。定义记号 $J^q(W^q(t),t)$为投资者 q 的值函数（Value Function），表示该投资者在 t 时，给定财富 $W^q(t)$，通过最优分配消费和投资组合，所能达到的终生最大期望效用，即

$$J^q(W^q(t),t) \equiv \max_{c^q,\boldsymbol{\omega}^q} E_t\left\{\int_t^{\infty} U^q(c^q(s),W^q(s),s)\mathrm{d}s\right\}.$$

下面采用随机动态规划方法求解投资者 q 的消费—投资组合问题。由泰勒展开公式和积分中值定理，将投资者 q 的消费—投资组合问题表达为：

$$\begin{aligned} J^q(W^q(t),t) &= \max_{c^q,\boldsymbol{\omega}^q} E_t \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int_t^{t+\Delta t} U^q(c^q(s),W^q(s),s)\mathrm{d}s \right. \\ &\quad \left. + \int_{t+\Delta t}^{\infty} U^q(c^q(s),W^q(s),s)\mathrm{d}s\right\} \\ &= \max_{c^q,\boldsymbol{\omega}^q} E_t\{U^q(c^q,W^q,t)\mathrm{d}t + J^q(W^q+\mathrm{d}W^q,t+\mathrm{d}t)\} \\ &= \max_{c^q,\boldsymbol{\omega}^q} E_t\left\{U^q\mathrm{d}t + J^q(W^q,t) + J_W^q\mathrm{d}W^q + J_t^q\mathrm{d}t + \frac{1}{2}J_{WW}^q\mathrm{d}W^q\mathrm{d}W^q\right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

此处记号 J_W^q 表示投资者 q 的值函数对其财富的偏微分，即 $\partial J^q/\partial W^q$，$J_t^q$ 表示值函数对时间的偏微分，即 $\partial J^q/\partial t$。上述推导中，第一个等号使用了定积分的定义，第二个等号使用了积分中值定理和值函数的定义，第三个等号使用了泰勒展开公式。在方程（3）左右两边，消去值函数 $J^q(W^q(t),t)$，并利用 $U^q\mathrm{d}t, J_W^q, J_t^q$ 和 J_{WW}^q 关于 t 时的可测性，得到

$$0 = \max_{c^q,\boldsymbol{\omega}^q}\{U^q\mathrm{d}t + J_W^q E_t[\mathrm{d}W^q] + J_t^q\mathrm{d}t + 0.5J_{WW}^q E_t[\mathrm{d}W^q\mathrm{d}W^q]\}. \tag{4}$$

将投资者的财富动态方程（2）代入方程（4），利用布朗运动的定义，并消去时间微分符号，得到如下 Hamiltion-Jacobi-Bellman 方程（简称 HJB 方程），

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c^q,\boldsymbol{\omega}^q}\{&U^q + J_W^q[(\boldsymbol{\omega}^q)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})W^q + rW^q - c^q] \\ &+ J_t^q + 0.5J_{WW}^q(W^q)^2(\boldsymbol{\omega}^q)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}^q\}. \end{aligned}$$

HJB 方程关于投资组合的一阶条件为

$$J_W^q(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})W^q + J_{WW}^q(W^q)^2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}^q = \mathbf{0},$$

此处 $\mathbf{0}$ 是 n 维全 0 列向量。在上面方程的左右两边，左乘以 $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$，得到投资者 q 投资于风险资产的投资组合向量为 $\boldsymbol{\omega}^q = -[J_W^q/(W^qJ_{WW}^q)]\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1})$。从而投资者 q 投资于风险资产 i 的投资组合权重等于

$$\omega_i^q = [-J_W^q/(W^qJ_{WW}^q)]\cdot\sum_{j=1}^{n} v_{ij}(\mu_j - r).$$

由于方程右边含有投资者的值函数和财富，所以投资者 q 投资于风险资产 i 的投资组合权重 ω_i^q 与其偏好和财富有关。并且，由于值函数和财富均为

时间的函数，除非投资者的相对风险规避系数（Relative Risk Aversion Coefficient，简称 RRA 系数，定义为$-W^{q}J^{q}_{WW}/J^{q}_{W}$）是常数，否则 ω_i^q 随时间而变化。如果投资者 q 是一个风险规避型的投资者，那么其 RRA 系数大于 0。显然，若资产市场中所有资产的期望收益率都大于无风险利率，那么，RRA 系数越大，投资者投资于每一种风险资产的比例就越小。

但是，投资者 q 投资在任意两个风险资产 i 和 k 之上的投资组合权重之比为

$$\frac{\omega_i^q}{\omega_k^q}=\frac{\sum_{j=1}^{n}v_{ij}(\mu_j-r)}{\sum_{j=1}^{n}v_{kj}(\mu_j-r)}.$$

方程右边不含有投资者的偏好和财富，ω_i^q/ω_k^q 是一个与偏好、财富和时间无关的常数，该常数只与各个风险资产的期望收益率、无风险利率和各个风险资产的收益率之间的协方差有关。

因此，虽然不同的投资者具有不同的偏好结构和财富水平，从而投资于风险资产的（绝对）投资组合不同，但是投资者投资在不同风险资产之间的（相对）投资组合却是相同的。这就是两基金分离现象[5]。

如果存在两基金分离现象，虽然资产市场有多种风险资产，但是对每一个投资者而言，就好像只存在两个基金，其中一个是风险基金，另一个是无风险基金。无风险基金投资于无风险资产；风险基金则投资于全部风险资产，而决不投资于无风险资产。从而，复杂的资产市场可以简化为：存在一种无风险资产和一种风险资产。且该风险资产由所有风险资产复合而成，相互权重与投资者的财富偏好无关，而只与风险资产的分布性质有关。因此，使用两基金分离定理可以极大地简化消费－投资组合模型，从而使得模型求解变得更加容易。

风险基金可以理解为，所有投资者均只投资于某个复合风险资产，该复合风险资产投资于各风险资产的投资组合为列向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，其中

$$y_i=\frac{\omega_i^q}{\sum_{k=1}^{n}\omega_k^q}=\frac{\sum_{j=1}^{n}v_{ij}(\mu_j-r)}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}v_{kj}(\mu_j-r)}.$$

---

[5] 研究两基金分离定理成立的角度有两个。第一个角度是从风险资产的价格或收益率所服从的分布函数出发。如 Ross(1978)，在静态投资模型中，证明存在两基金分离的充分条件是风险资产的收益率服从联合正态分布。另一个角度是从投资者的效用函数出发。Cass 和 Stiglitz(1970)证明，如果投资者的效用函数是 HARA 型的，那么不管风险资产收益率的分布函数是否服从正态分布，都有两基金货币分离。而在连续时间动态模型中，Merton(1971)证明了如果风险资产的价格服从几何布朗运动，那么两基金分离定理成立。

使用矩阵记号,风险基金投资于各个风险资产之上的投资组合 y 等于 $\frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}$。

四、风险基金的动态

本节证明风险基金的价格服从几何布朗运动,并给出风险基金的期望收益率和波动率之间的关系[6]。

记风险基金的价格为 $P_F(t)$,依据风险基金的定义,风险基金的价格服从如下随机过程

$$\frac{\mathrm{d}P_F(t)}{P_F(t)}=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\mathrm{d}P_i(t)}{P_i(t)}=\sum_{i=1}^{n}y_i\mu_i\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}y_i\sigma_i\mathrm{d}B_i(t).$$

下面说明风险基金的价格服从几何布朗运动。由于 $\mathrm{d}B_i(t)$ 服从均值为 0,方差为 $\mathrm{d}t$ 的正态分布,所以线性组合 $\sum_{i=1}^{n}y_i\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)$ 也服从正态分布,且其均值为

$$E_t\Big[\sum_{i=1}^{n}y_i\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\Big]=\sum_{i=1}^{n}y_i\sigma_iE_t[\mathrm{d}B_t(t)]=0,$$

方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_t\Big[\sum_{i=1}^{n}y_i\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\Big]&=\mathrm{var}_t\left[\boldsymbol{y}\begin{pmatrix}\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\\ \vdots\\ \sigma_n\mathrm{d}B_n(t)\end{pmatrix}\right]=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{var}_t\left[\begin{pmatrix}\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\\ \vdots\\ \sigma_n\mathrm{d}B_n(t)\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{y}\\&=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}\boldsymbol{\Omega}\frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}\mathrm{d}t\\&=\frac{(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{[\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})]^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中第三个等号使用了协方差矩阵的定义,第四个等号使用了 y 的定义,并利用了协方差矩阵的对称性。因此,风险基金的价格服从几何布朗运动,记为 $\mathrm{d}P_F/P_F=\mu_F\mathrm{d}t+\sigma_F\mathrm{d}B_F$,其中 μ_F 和 σ_F 都是常数。下面进一步给出 μ_F 和 σ_F 的具体表达式。

[6] 本节和第五节所使用的方法和技巧与陈彦斌和徐绪松(2003)有关的内容和方法很相似。但是由于本文的效用函数是财富偏好,发生了变化,因此为了全文的完整性,有必要重新证明财富偏好下的基于风险基金的CAPM模型。

由风险基金的定义可知风险基金的期望收益率等于

$$\mu_F = E_t(\mathrm{d}P_F/P_F)/\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} y_i\mu_i = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}$$
$$= \frac{[(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})^{\mathrm{T}}+r\mathbf{1}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}$$
$$= \frac{(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}+r, \tag{5}$$

风险基金的收益率的方差等于

$$(\sigma_F)^2 = \mathrm{var}_t(\mathrm{d}P_F/P_F)/\mathrm{d}t = \mathrm{var}_t\Big[\sum_{i=1}^{n} y_i\sigma_i\mathrm{d}B_i(t)\Big]/\mathrm{d}t$$
$$= \frac{(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{[\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})]^2}. \tag{6}$$

由（5）和（6）得到

$$(\sigma_F)^2 = \frac{\mu_F - r}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}. \tag{7}$$

至此，已经得到了风险基金的动态，即风险基金的价格所服从的几何布朗运动，并给出了期望收益率与波动率之间的关系式。这对于证明基于风险基金的 CAPM 和 CCAPM 模型是十分方便的。

五、基于风险基金的 CAPM 模型

本节证明，当经济中的投资者的效用函数为财富偏好时，基于风险基金的 CAPM 模型仍然成立。结果反映在下面的定理 1 中。在基于风险基金的 CAPM 模型中，资产定价的基准不是市场组合，而是两基金分离之中的风险基金。

定理 1（基于风险基金的 CAPM 模型）　假定投资者的效用函数具有财富偏好的特点，经济中所有风险资产的价格都服从几何布朗运动，并且存在无风险资产。任意风险资产 i 的期望收益率 $\boldsymbol{\mu}_i$ 满足如下关系

$$\mu_i - r = \beta_{iF}(\mu_F - r),$$

此处 $\beta_{iF} \equiv \mathrm{cov}_t(\mathrm{d}P_i/P_i, \mathrm{d}P_F/P_F)/\mathrm{var}_t(\mathrm{d}P_F/P_F)$。

证明　令 $\mathrm{d}V/V$ 是任意的可行投资组合 V 的收益率。如果 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为该投资组合 V 投资于各个风险资产的投资组合向量，$1-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}$ 为该投资组合 V 投资于无风险资产的投资组合权重。因为所有风险资产的价格都服从几何布朗运动，所以投资组合 V 的价格服从几何布朗运动，并且有

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}+(1-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{1})r\mathrm{d}t$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i(\mu_i-r)+r\right]\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma_i\mathrm{d}B_i.$$

因为风险基金的价格服从几何布朗运动，$\mathrm{d}P_F/P_F=\mu_F\mathrm{d}t+\sigma_F\mathrm{d}B_F$**，所以，由** β **的定义得到**

$$\beta=\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}V/V,\mathrm{d}P_F/P_F)/\mathrm{var}_t(\mathrm{d}P_F/P_F)=\frac{\mathrm{cov}_t\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma_i\mathrm{d}B_i,\sigma_F\mathrm{d}B_F\right)}{(\sigma_F)^2}\Big/\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma_i\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}B_i,\mathrm{d}B_F)}{\sigma_F}\Big/\mathrm{d}t. \tag{8}$$

由于风险基金的价格服从几何布朗运动，那么布朗运动项等于 $\sigma_F\mathrm{d}B_F=\sum_{j=1}^{n}y_j\sigma_j\mathrm{d}B_j$ 。**因此，**

$$\sigma_i\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}B_i,\mathrm{d}B_F)=\frac{\mathrm{cov}_t(\sigma_i\mathrm{d}B_i,\sigma_F\mathrm{d}B_F)}{\sigma_F}=\frac{\mathrm{cov}_t\left(\sigma_i\mathrm{d}B_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\sigma_j\mathrm{d}B_j\right)}{\sigma_F}$$
$$=\frac{\sum_{j=1}^{n}y_j\mathrm{cov}_t(\sigma_i\mathrm{d}B_i,\sigma_j\mathrm{d}B_j)}{\sigma_F}=\frac{\sum_{j=1}^{n}y_j\sigma_{ij}}{\sigma_F}\mathrm{d}t,$$

将之代入（8），**得到**

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}y_j\sigma_{ij}}{(\sigma_F)^2}=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{y}}{(\sigma_F)^2}=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}}{(\sigma_F)^2}\frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}$$
$$=\frac{1}{(\sigma_F)^2}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})}{\mu_F-r}, \tag{9}$$

其中最后一个等号利用了式（7）。

由于投资组合 V **的期望收益率** $\alpha=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}+(1-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{1})r$，**所以得到** $\alpha-r=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})$。**再由**(9)，**那么投资组合** V **的期望收益率** α **满足如下关系**

$$\alpha-r=\beta(\mu_F-r),$$

此处 $\beta\equiv\dfrac{\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}V/V,\mathrm{d}P_F/P_F)}{\mathrm{var}_t(\mathrm{d}P_F/P_F)}$**度量该投资组合的风险。由于任意风险资产也是可行的投资组合，所以对任意资产也成立。证毕。**

定理 1 给出了基于风险基金的 CAPM 模型，模型描述了资产的收益与风险之间的线性关系。资产的风险定义为，资产收益率与风险基金收益率之间的协方差除以风险基金收益率的方差。定理 1 对风险的这种定义十分类似于传统的 CAPM 模型中的 Beta 系数，即资产收益率与市场组合收益率的协方差除以市场组合收益率的方差。显然，定理 1 中的风险与传统的 CAPM 模型中的 Beta 系数是截然不同的。

下面分析说明基于风险基金的 CAPM 模型的经济含义。不妨假设投资者现在持有风险基金，并且风险基金的期望收益率高于无风险利率。如果风险资产 i 的 β_{iF} 大于 0，那么风险资产 i 的收益率与风险基金的收益率正相关[7]。从而，投资者做多风险资产 i 将会增加所持有资产的风险，因此，该风险资产的收益率一定大于无风险利率，否则投资者不愿意持有该风险资产。这个均衡分析过程与定理 1 的预测是一致的。同理也可以分析其他各种情形。

六、单个投资者的基于财富偏好的资本资产定价模型

本节使用基于风险基金的 CAPM 模型，证明基于财富偏好的资本资产定价模型。结果反映在定理 2 中。定理 2 重现了 Bakshi and Chen(1996)的结果。

使用无风险基金和风险基金，投资者 q 的财富动态方程(2)可以重新描述为

$$dW^q = [\omega^q \mu_F + (1-\omega^q)r]W^q dt + \omega^q W^q \sigma_F dB_F - c^q(t)dt,$$

此处实数 ω^q 是投资者 q 将财富投资在风险基金之上的比例，$1-\omega^q$ 是投资者 q 投资在无风险基金之上的比例。

投资者 q 的状态变量为财富和时间，而控制变量是消费和投资组合。由泰勒展开公式和积分中值定理，得到投资者的 HJB 方程为

$$0 = \max_{c^q,\omega^q}\{U^q + J_W^q[\omega^q W^q \mu_F + (1-\omega^q)W^q r - c^q] + J_t^q + 0.5 J_{WW}^q(\omega^q W^q \sigma_F)^2\}.$$

HJB 方程关于消费的一阶条件为

$$U_c^q(c^q, W^q, t) = J_W^q,$$

关于投资组合的一阶条件为

$$\omega^q W^q = -\frac{J_W^q}{J_{WW}^q}\frac{\mu_F - r}{(\sigma_F)^2}. \tag{10}$$

---

[7] β_{iF} 系数与相关系数是两个不同的概念。β_{iF} 定义为 $\mathrm{cov}_t(dP_i/P_i, dP_F/P_F)/\mathrm{var}_t(dP_F/P_F)$，度量的是该资产的风险；相关系数定义为 $\mathrm{cov}_t(dP_i/P_i, dP_F/P_F)/\sqrt{\mathrm{var}_t(dP_i/P_i)\times\mathrm{var}_t(dP_F/P_F)}$，度量的是该资产收益率与风险基金收益率之间的相关性。

在一阶条件中，消费是最优消费。从而，最优消费（控制变量）是财富（状态变量）的函数。因此，可以定义记号 $G^q(W^q,t)\equiv U_c^q(c^q,W^q,t)=J_W^q(W^q,t)$。在 $G^q(W^q,t)=J_W^q$ 上使用 Ito 引理，然后除以 G^q，得到 G^q 的增长率为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G^q}{G^q}&=\frac{J_{Wt}^q\mathrm{d}t+J_{WW}^q\mathrm{d}W^q+0.5J_{WWW}^q(\mathrm{d}W^q)^2}{G^q}\\&=\frac{J_{Wt}^q\mathrm{d}t+J_{WW}^q\mathrm{d}W^q+0.5J_{WWW}^q(\mathrm{d}W^q)^2}{J_W^q}.\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}G^q/G^q$ 中只有 $J_{WW}^q\mathrm{d}W^q/J_W^q$ 项含有布朗运动，那么，对价格为 P_i 的任意风险资产 i，风险资产 i 的收益率与 G^q 的增长率之间的协方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}G^q}{G^q}\right)&=\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{J_{WW}^q\mathrm{d}W^q}{J_W^q}\right)=\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{J_{WW}^q}{J_W^q}\omega^qW^q\sigma_F\mathrm{d}B_F\right)\\&=-\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mu_F-r}{(\sigma_F)^2}\sigma_F\mathrm{d}B_F\right)\\&=-\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mu-r\mathbf{1})\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}P_F}{P_F}\right),\end{aligned}\tag{11}$$

其中第三个等号利用了一阶条件（10），第四个等号利用了风险基金的期望收益率与方差之间的关系式（7）。

由定理 1 可知，风险资产 i 的期望超额收益率等于

$$\mu_i-r=\frac{\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}P_i/P_i,\mathrm{d}P_F/P_F)}{\mathrm{var}_t(\mathrm{d}P_F/P_F)}(\mu_F-r)=\frac{\mathrm{cov}_t(\mathrm{d}P_i/P_i,\mathrm{d}P_F/P_F)}{(\sigma_F)^2\mathrm{d}t}(\mu_F-r),\tag{12}$$

其中第二个等号利用了风险基金收益率的方差等于 $(\sigma_F)^2$ 这一事实。从而，风险资产 i 的收益率和风险基金的收益率的协方差等于

$$\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}P_F}{P_F}\right)=\frac{(\mu_i-r)(\sigma_F)^2}{\mu_F-r}\mathrm{d}t=\frac{(\mu_i-r)\mathrm{d}t}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})},$$

其中第二个等号使用了式（7）。

那么，由上式，风险资产 i 的期望超额收益率等于

$$\mu_i-r=\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1})\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}P_F}{P_F}\right)\Big/\mathrm{d}t,$$

再利用（11），得到

$$\mu_i-r=-\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}G^q}{G^q}\right)\Big/\mathrm{d}t.\tag{13}$$

在 $G^q(W^q,t)=U_c^q(c^q,W^q,t)$ 上使用 Ito 引理，得到

$$dG^q = U_{cc}^q dc^q + U_{ct}^q dt + 0.5U_{ccc}^q (dc^q)^2 + U_{cW}^q dW^q + 0.5U_{cWW}^q (dW^q)^2.$$

由于只有 dc^q 和 dW^q 含有随机项，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}_t\left(\frac{dP_i}{P_i},\frac{dG^q}{G^q}\right) &= \mathrm{cov}_t\left(\frac{dP_i}{P_i},\frac{U_{cc}^q dc^q}{U_c^q}+\frac{U_{cW}^q dW^q}{U_c^q}\right)\\ &= \mathrm{cov}_t\left(\frac{dP_i}{P_i},\frac{c^q U_{cc}^q}{U_c^q}\frac{dc^q}{c^q}+\frac{W^q U_{cW}^q}{U_c^q}\frac{dW^q}{W^q}\right),\end{aligned}$$

结合（13），得到如下定理 2。

定理 2　假定经济中的投资者的偏好各不相同，并且效用函数具有财富偏好的特点，经济中存在无风险资产，所有风险资产的价格都服从几何布朗运动，那么，对于经济中的任意投资者和任意风险资产，下面的等式都成立

$$\mu_i - r = \delta_c^q \mathrm{cov}_t\left(\frac{dP_i}{P_i},\frac{dc^q}{c^q}\right)\Big/ dt + \delta_W^q \mathrm{cov}_t\left(\frac{dP_i}{P_i},\frac{dW^q}{W^q}\right)\Big/ dt, \tag{14}$$

此处 $c^q(t)$ 和 $W^q(t)$ 是投资者 q 的最优消费和财富路径，$\delta_c^q = -c^q U_{cc}^q / U_c^q$ 和 $\delta_W^q = -W^q U_{cW}^q / U_c^q$。[8]

定理 2 不但定性而且定量地描述了财富偏好对资产定价的影响。例如，如果某风险资产的收益率与投资者的财富增长率的协方差大于 0，那么持有该资产将会加大投资者的财富增长率的波动。由于投资者的效用函数关于其财富的一阶偏微分大于 0，二阶偏微分小于 0，所以投资者的效用水平会下降。因此，δ_W^q 大于 0 的投资者必然要求该资产具有更高的溢价，才愿意持有该风险资产。显然，这一点容易由（14）得到验证。

定理 2 与 Bakshi and Chen 的相关结果形式上十分相似，但不同之处在于：一方面，定理 2 中资产的价格服从几何布朗运动，而 Bakshi and Chen 的定理中资产的价格服从 Ito 过程；另一方面，也就是最关键的地方，定理 2 的经济是异质投资者经济，定理 2 对经济中的每一个投资者均成立，而 Bakshi and Chen 的定理只对代表性投资者成立。

七、异质者投资者经济中的基于财富偏好的资本资产定价模型不能成立

本节证明在异质者投资者经济中，基于财富偏好的资本资产定价模型不能

[8] 值得注意的是，由于引入了财富偏好，所以定理 2 中的 δ_c^q 不再等于 RRA 系数（Constantinides，1990）。

成立。

只要投资者的效用函数是财富偏好,那么定理 2 是正确的资产定价模型。因此,任意效用最大化的投资者的最优消费和财富,均可以用来作为资产定价的基准。但是,投资者之间的不信任以及信息不对称,会导致任何具有声望的投资者的最优消费和财富,也不会被所有其他投资者所承认并用来定价资产。从而,定理 2 无法实际使用[9]。

由于总消费和总财富数据的公共可观察性,所以,很自然地,希望将定理 2 推广到使用总消费和总财富的情形。但是,下面的定理 3 指出,这种推广是无法实现的。下面给出详细过程。

记 $c(t)$和 $W(t)$分别为 t 时经济中的总消费和总财富。在任何时刻,总消费 $c(t)$等于经济中所有投资者的消费的总和,即 $c(t)=\sum_{q=1}^{K}c^q(t)$。那么,总消费的微分 $\mathrm{d}c$ 等于 $\sum_{q=1}^{K}\mathrm{d}c^q$。从而,总消费的增长率为:

$$\frac{\mathrm{d}c}{c}=\sum_{q=1}^{K}\frac{c^q}{c}\,\frac{\mathrm{d}c^q}{c^q}=\sum_{q=1}^{K}x_q\,\frac{\mathrm{d}c^q}{c^q},$$

其中 $x_q(t)\equiv c^q(t)/c(t)$是投资者 q 的消费占总消费的比例,随时间的变化而变化。因此,总消费的增长率等于经济中每个投资者的消费增长率的加权平均和,权重是每个投资者的消费占总消费的比例。

同理,总财富 $W(t)$等于经济中所有投资者的财富的总和,即 $W(t)=\sum_{q=1}^{K}W^q(t)$。那么,总财富的微分 $\mathrm{d}W$ 等于 $\sum_{q=1}^{K}\mathrm{d}W^q$。从而,总财富的增长率为:

$$\frac{\mathrm{d}W}{W}=\sum_{q=1}^{K}\frac{W^q}{W}\,\frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}=\sum_{q=1}^{K}z_q\,\frac{\mathrm{d}W^q}{W^q},$$

其中 $z_q(t)\equiv W^q(t)/W(t)$是投资者 q 的财富占总财富的比例.

风险资产 i 收益率与总消费增长率的协方差等于

$$\begin{aligned}\beta_{ic}&\equiv\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}c}{c}\right)\Big/\mathrm{d}t=\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\sum_{q=1}^{K}x_q\,\frac{\mathrm{d}c^q}{c^q}\right)\Big/\mathrm{d}t\\&=\sum_{q=1}^{K}x_q\mathrm{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i},\frac{\mathrm{d}c}{c^q}\right)\Big/\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

[9] 这类似于在 CAPM 模型中,虽然任何前沿投资组合均可以用来定价,但是实际使用的是基于市场组合的定价方程。同样在 CCAPM 模型中,任意效用最大化的投资者的最优消费可以用来定价资产,但是实际使用的是基于总消费的定价方程。

风险资产 i 收益率与总财富增长率的协方差等于

$$\beta_{iW} \equiv \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \frac{\mathrm{d}W}{W}\right) \Big/ \mathrm{d}t = \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \sum_{q=1}^{K} z_q \frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{q=1}^{K} z_q \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t.$$

将（14）变形为

$$\operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \frac{\mathrm{d}c^q}{c^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t = \frac{\mu_i - r}{\delta_c^q} - \frac{\delta_W^q}{\delta_c^q} \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t.$$

两边乘以 x_q 并求和，得到

$$\beta_{ic} = \frac{\mu_i - r}{\delta_c} - \sum_{q=1}^{K} x_q \frac{\delta_W^q}{\delta_c^q} \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t.$$

此处 $\delta_c \equiv 1/\left(\sum_{q=1}^{K} x_q/\delta_c^q\right)$ 是所有投资者的 δ_c^q 的加权调和平均值。将方程变形，得到

$$\mu_i - r = \delta_c\left[\beta_{ic} + \sum_q x_q \frac{\delta_W^q}{\delta_c^q} \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{p_i}, \frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t\right]$$

$$= \delta_c \beta_{ic} + \sum_{q=1}^{K} \frac{x_q}{z_q} \frac{\delta_W^q}{\delta_c^q} \delta_c \left[z_q \operatorname{cov}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{P_i}, \frac{\mathrm{d}W^q}{W^q}\right) \Big/ \mathrm{d}t\right]. \tag{15}$$

当不存在财富偏好时，δ_W^q 等于 0，方程（15）就是 Breeden（1979）经典的 CCAPM 模型。

在方程（15）中，如果对任意的投资者，$\frac{x_q/\delta_c^q}{z_q/\delta_W^q}$ 均相等，即 $\frac{x_q/\delta_c^q}{z_q/\delta_W^q}$ 与 q 无关，那么得到如下所希望得到的基于财富偏好的资本资产定价模型：

$$\mu_i - r = \delta_c \beta_{ic} + \delta_W \beta_{iW},$$

此处 $\delta_W \equiv \frac{x_q/\delta_c^q}{z_q/\delta_W^q} \delta_c$。但是，一般情况下，$\frac{x_q/\delta_c^q}{z_q/\delta_W^q}$ 都不可能与 q 无关。因此，基于财富偏好的资本资产定价模型在异质投资者经济中不能成立。上述过程可以总结为如下定理 3。

定理 3　假定与定理 2 相同，Breeden（1979）的经典的 CCAPM 模型不能被推广到包含财富偏好的资产定价模型。

Bakshi and Chen 得到使用总消费和总财富的基于财富偏好的资本资产定价模型。这是因为 Bakshi and Chen 使用的是代表性投资者经济，将经济中的所有投资者的偏好视为相同的，从而，该代表性投资者的消费就是总消费，

投资者的财富就是总财富。这种情况下的定价模型的实质，就是定理2，并没有从根本上得到使用总消费和总财富的基于财富偏好的资本资产定价模型。

本文作者认为，问题的关键在于，不能随意做出“代表性投资者经济”这个假定。“代表性投资者经济”假定必须具有合理的逻辑基础。比如说，在CCAPM模型中，资产的定价基准是经济中的总消费。因此，可以假设存在一个代表性投资者，其消费就是经济中的总消费，其相对风险规避系数等于所有投资者的相对风险规避系数的加权调和均值[10]。

八、结 论

本文在经典的CCAPM模型（Breeden，1979）基础之上，引入了财富偏好。本文研究了财富偏好对资产定价的影响。本文的研究发现，不可能在异质投资者经济中构建基于财富偏好的资本资产定价模型。因此，不能将经典的CCAPM模型推广到包含财富偏好的资产定价模型。这个结论，反映了财富偏好具有一定的局限性。

本文的结论具有一定的理论意义。由于CAPM和CCAPM模型都建立在异质投资者经济之上，所以建立在代表性投资者经济之上的基于财富偏好的资本资产定价模型，并不是对Breeden（1979）的CCAPM的一脉相承的发展。因此，使用该模型对股票溢价之谜的解释，是无法令人信服的。进而，在Bakshi and Chen基础之上发展起来的许多模型，如Smith（2001）等，都需要重新研究和审视。

参 考 文 献

[1] Barberis，Nicholas，Ming Huang，and Tano，Santos，“Prospect Theory and Asset Prices”，*Quarterly Journal of Economics*，2001，116（1），1—53.

[2] Bakshi，G.，and Z. Chen，“The Spirit of Capitalism and Stock Market Prices”，*American Economic Review*，1996，86（1），133—157.

[3] Breeden，D. T.，“An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities”，*Journal of Financial Economics*，1979，7(3)，265—296.

[4] Cass，D.，and J. E.，Stiglitz，“The Structure of Investor Preferences and Asset Returns，and Separability in Portfolio Allocation：A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds”，*Journal of Economic Theory*，1970，2(2)，122—160.

[5] 陈彦斌、肖争艳、邹恒甫，“财富偏好、习惯形成和消费与财富的波动率”，《经济学(季刊)》2003年第3卷第1期，第147—156页。

[10] 这也类似于常见的假定“经济中只存在一种风险资产和一种无风险资产”。准确的逻辑是，首先是假定经济中有一种无风险资产和许多价格服从几何布朗运动的风险资产，然后由于两基金分离成立，才可以简化为两资产情形。

[6] 陈彦斌、徐绪松，“基于风险基金的资本资产定价模型”，《经济研究》2003 年第 12 期，第 34—42 页。
[7] 陈彦斌、周业安，“行为资产定价理论综述”，《经济研究》2004 年第 6 期，第 117—127 页。
[8] 陈彦斌，“情绪波动和资产价格的波动”，《经济研究》2005 年第 3 期，第 36—45 页。
[9] Constantinides, G. M., "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle", *Journal of Political Economy*, 1990, 98 (3), 519—543.
[10] Huang, C., and Litzenberger R H., *Foundations for Financial Economics*. New York: North-Holld, 1988.
[11] Kurz, M., "Optimal Economic Growth and Wealth Effects", *International Economic Review*, 1968, 9 (3), 348—357.
[12] Ljungqvist, L., and T., Sargent , *Recursive Macroeconomic Theory*. Cambridge: MIT Press, 2001.
[13] Merton, R. C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics*, 1969, 51(3), 247—257.
[14] Merton, R. C., "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory*, 1971, 3(13), 373—413.
[15] Merton, R. C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, 1973, 41 (5), 867—887.
[16] Roll, R., "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests-Part 1: On Past and Potential Testability of the Theory", *Journal of Financial Economics*, 1977, 4 (2), 129—176.
[17] Ross, S. A., "Mutual Fund Separation in Financial Theory-the Separating Distributions", *Journal of Economic Theory*, 1978, 17(2), 254—286.
[18] 徐绪松、陈彦斌，“基于相对财富和习惯形成的资本资产定价模型”，《管理科学学报》2004 年第 3 期，第 1—5 页。
[19] Zou, H., "The Spirit of Capitalism and Long-Run Growth", *European Journal of Political Economy*, 1994, 10 (2), 279—293.
[20] Zou, H., "The Spirit of Capitalism and Savings Behavior", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1995, 28 (1), 131—143.
[21] Zou, H., "The Spirit of Capitalism, Social Status, Money, and Accumulation", *Journal of Economics*, 1998, 68 (3), 219—233.

Heterogeneous Preference for Wealth and Asset Pricing

YANBIN CHEN　YE'AN ZHOU
(*Renmin University of China*)

Abstract　In the representative investor's economy, Bakshi and Chen (1996) propose a capital asset pricing model based on the preference for wealth. This paper examines the effect of preference for wealth on asset prices in an economy with heterogeneous investors. If the price of the risky asset follows the geometric Brownian motion, the asset market exhibits the separation of two funds. We prove that the CAPM for the risky fund, and find that the CAPM based on preferences for wealth holds true when the pricing kernel consists of individual investors' optimal consumption and wealth. However, we find that the CAPM based on the preference for wealth cannot hold true when the pricing kernel consists of the aggregate consumption and aggregate wealth. That is, the Breeden's (1979) CCAPM cannot be extended into asset pricing based on preferences for wealth in an economy with heterogeneous investors.

JEL Classification E21, G11, G12