第 24 卷第 1 期　　经 济 学（季 刊）　　Vol. 24，No. 1
2024 年 1 月　　China Economic Quarterly　　January，2024

# 新高考改革中的科目选考机制

## ——一个博弈论分析

盛大林　吴星晔　钟笑寒[*]

**摘　要**：新高考改革允许学生自由选择考试科目，但考生为追求高分而进行的策略性科目选择也可能导致意料之外的政策后果。本文研究了科目选考机制下的纳什均衡。研究表明，科目选考制度存在多重纳什均衡的问题，且其中一些均衡可能会导致选考不同学科的人数比例差异过大。选考科目保障机制能够有效缓解这一问题。

**关键词**：匹配；高考改革；科目选考制度

**DOI**：10.13821/j.cnki.ceq.2024.01.02

## 一、引　　言

高考制度改革一直是社会大众和政府关心的重要问题。2013 年 11 月，党的十八届三中全会通过了《中共中央关于全面深化改革若干重大问题的决定》，其中指出要“推进考试招生制度改革，……。探索全国统考减少科目、不分文理科”，拉开了新高考改革的序幕。2014 年 9 月，国务院印发了《关于深化考试招生制度改革的实施意见》，提出高校招生录取总成绩由必考科目和选考科目的成绩组成，除必考的语文、数学、外语之外，学生需从物理、化学、生物、政治、历史、地理六门科目中自主选择科目进行考试，自主选择的科目被称为选考科目。文件下发后，截至 2021 年 8 月，已有 3 个批次，共 14 个省市公布并实施了相应方案。① 为了使得选考不同科目组合的考生成绩相互可比，各省市均采用了等级赋分制，即将考生在某一自选科目中所取得的成绩，根据考生的原始分在报考该科目的所有考生中的排序位置，来赋予相应分数。②

*　盛大林，西南财经大学中国行为经济与行为金融研究中心；吴星晔，清华大学经济管理学院；钟笑寒，清华大学经济管理学院，清华大学中国经济研究中心。通信作者及地址：钟笑寒，北京市海淀区清华大学经济管理学院，100084；电话：(010) 62772540；E-mail：zhongxh@sem.tsinghua.edu.cn。本文受国家自然科学基金（71874095、72033006）资助。作者感谢两位匿名审稿人以及雷震、李相梁、田森、汪浩、吴泽南等学者的宝贵意见，以及西南财经大学中国行为经济与行为金融研究中心、第三届中国微观经济理论论坛和清华大学—北京大学 NCER-CCER 第一届中国经济研讨会的参会者对本文提出的宝贵意见。作者文责自负。

①　在新高考改革实践中，前两个批次的省市采用的是“3＋3”模式，考生在六门科目中选择三门进行考试，而第三批次的省市采用的是“3＋1＋2”模式，考生必须在物理与历史中选择一门，并另从其他四门科目中再选择两门进行考试。

②　以第三批新高考改革省份江苏所使用的转换规则为例，假设一名考生在高考时地理卷面分数为 85 分（满分 100），而在全省选考该科目中排名前 15％的考生的原始分数区间为 79—100，则由转换规则（该转换规则依据正态分布确定）查表，知道前 15％的赋分区间为 86—100，记该考生的标准分为 $T$，则 $T$ 满足 $\frac{100-85}{85-79}=\frac{100-T}{T-86}$ 解得 $T=90$，即该考生最终的地理成绩为 90 分。规则细节可参考江苏省《关于普通高中学业水平选择性考试成绩计入高考总成绩方式的通知》。

按照等级赋分制，考生的成绩主要取决于考生在报考该科目的考生群体中的相对水平（即分位数），而非其原始分数。科目选考机制推出后，一部分考生家长担心，如果考生群体预期选择某科目的考生能力较强，则能力略弱的学生将不选择该科目，从而反过来支持了这样的预期，最终导致该科目报考人数比例较低。

事实的确如此。例如，2017年，浙江省选考物理的考生占全体考生的比例为36.0％，2018年这一数据降为30.0％，选考物理的考生比例已成为所有科目中最低。作为对比，2016年（实行科目选考前一年），浙江省考生中选考物理的学生（即“理科生”）占比为63.0％（冯成火，2018）。为了应对物理科目考生人数大幅下降的情况，部分省份调整了改革方案，要求考生必须从物理和历史中选择一门，再从剩下的四门科目中选择两门。然而，调整后的选考方案依然面临类似的问题。例如，2021年江苏省实行了调整后的方案，选择化学的考生仅占总考生的14.6％①，远低于四科目选二的平均选考比例50％。

为了尽快扭转某些特定科目选考人数下降的趋势，多省的教育部门推行了选考科目保障机制。这一机制规定了一个保障比例，当该科目实考人数占当年高考总实考人数的比例低于该保障比例时，启动保障机制，具体操作是：将该保障比例对应的考生人数作为等级赋分的比例基数，人为添加分数低于实考最低分的“虚拟”考生，使总人数达到等级赋分的比例基数，以此提高原有实考考生在该科目取得的分数。以上述的江苏省为例，江苏省于2020年3月针对化学学科建立选考科目保障机制，将保障比例定为25％，按照2021年的高考数据，如不考虑选考科目保障机制，则化学学科的最后一名考生的成绩为最低分30分；如考虑选考科目保障机制，则最后一名考生在计算成绩时的排名变为14.6％/25％＝58.4％，处于56—70分的区间。

虽然选考科目保障机制的出发点是好的，但当实际触发时，会引起人们对公平的担忧：考虑最极端的情况，如果一名考生每科都交白卷，在上述例子中，在没有选考科目保障机制的生物科目里他只能得到最低分30分，而在化学科目里他能得到56分，多出的26分仅仅是因为他选择了化学科目，导致“考得好不如选得好”。

本文将围绕高考科目选考机制展开理论分析，重点回答两个问题：第一，科目选考是否会导致某些科目考生过少；第二，如果是的话，选考科目保障机制能否纠正这一点？我们首先证明，博弈中存在多重均衡的情况，对于任意一门选考科目，在纳什均衡下该科目的选考人数比例可以任意接近于0。多重均衡导致考生对均衡实现的预期不同，因此在实际中博弈的均衡结果难以实现，部分考生在博弈结束后可能会后悔。选考科目保障机制能够纠正这一现象：它排除掉了选考不同科目间的人数比例差异过大的均衡，减小了多重均衡的范围。

我们也对科目选考机制的福利性质进行了分析。第一，在科目选考机制下，所有均衡都是帕累托有效的，即不存在一个均衡，所有考生的高考分数都不低于且至少有一个人高于另一个均衡。第二，我们发现，科目选考机制具有一定的公平性，即在同一均衡中，当考生甲在所有科目上的能力都优于考生乙时，其高考分数也更高；但科目选考机

① 资料来源：“江苏2021新高考选科数据曝光？化学触发保底机制，那么政治呢？”，网易，www.163.com/dy/article/FTNNPVCM0536FY91.html。

制并不尊重特长，即若考生甲在最优的数门科目上的能力比乙在最优的数门科目上的能力更优，其高考分数不一定高于考生乙；科目选考机制也不尊重改进，即若某“复读”考生在第二次考试中在所有科目上的能力都提高了，多重均衡也会导致其高考分数不一定高于其在第一次考试中的分数。

从没有选考科目到有选考科目，科目间的分数转换至关重要。一些教育学文献注意到了分数转换规则可能带来的问题。例如，温忠麟和罗冠中（2006）及温忠麟（2020）指出，标准分机制人为地将不同科目的考生群体的分数分布变成相同的，由于选考物理的考生整体能力较高，因此这一机制对选考物理科目的考生是不利的。文东茅等（2015）通过数据模拟发现，赋分制相比于原始分，并未降低对学生的区分度。此外，刘海峰（2019）回顾了教育部门推进高考改革的历程和遇到的困难。

虽然已有不少教育学学者对科目选考机制进行过探讨，但本文是研究高考制度改革中科目选考机制的一篇经济学文献。过去研究高考制度改革的经济学文献大多集中在给定考试科目下录取机制的改革。例如，魏立佳（2009）证明，在平行志愿下，降低投档比例和增加志愿个数可以提高学生效用。李小龙等（2014）研究了高考招生名额在不同省之间的分配问题。Lien et al.（2016）研究了考前填报志愿填报与考后填报志愿的不同。Chen and Kesten（2017）和 Ha et al.（2020）对比研究了立即录取机制（波士顿机制）和平行录取机制（上海机制）。尚未有文献对科目选考和选考科目保障机制进行研究，我们的研究填补了这一空白。

本文后续安排如下：第二部分用一个简单的例子来说明我们的理论结果，第三部分为正式的模型设定和理论分析，第四部分为不同均衡之间的福利比较，第五部分是本文的结论。

## 二、例　　子

在引入一般性模型之前，我们先用一个简单的例子来说明均衡下选考各科的考生比例可以是任意的，而选考科目保障机制可以有效避免选考某些科目的考生人数过少的问题。

假设高考只涉及两个科目，分别为科目 1 和科目 2。对于一位典型的考生，令$x_1$为其在科目 1 上的能力，以表示假如所有考生都选考科目 1 则该考生科目 1 的原始分数在考生总体中的分位数为 $x_1$；类似地，令$x_2$为其在科目 2 上的能力。假设共有总质量为 1 的无穷多名考生，且（$x_1$，$x_2$）在考生群体中服从正方形$[0，1]^2$上的均匀分布，即考生在两门科目上的能力是独立的。每位考生需要在两个科目中选择一门参加考试，其高考成绩取决于该考生在其选考科目上的能力在所有选考该科目的考生中的分位数。每位考生知道自己的能力（$x_1$，$x_2$），目标为最大化自己的高考成绩。

在这个博弈里，一个显然的纳什均衡如下。

**结论 1**　以下的策略组合构成一个纳什均衡：所有$x_1>x_2$ 的考生选择科目 1，所有$x_1<x_2$ 的考生选择科目 2，所有$x_1=x_2$ 的考生随机地从科目 1 和科目 2 中选一科。

证明：任意考虑一名考生，设其能力分位数为（$x_1$，$x_2$）。假设所有其他考生按照上述策略选择考试科目，则我们需要验证这名考生也有激励按照上述策略选择考试科

目。此时，如图1(a) 所示，处于正方形对角线上的考生（例如考生A）任意选择一科，处于正方形对角线右下方的考生（例如考生B）选考科目1，处于对角线左上方的考生（例如考生C）选考科目2，且选择科目1和选择科目2的考生各占全体考生的一半。如果这名能力为（$x_1$，$x_2$）的考生选考科目1，由于选考科目1且能力低于该考生的考生总质量为$0.5x_1^2$（在图1(a) 中以白色三角形表示），该考生的高考成绩是其在科目1上的能力在所有选考科目1的考生中的分位数，即$\frac{0.5x_1^2}{0.5}=x_1^2$。类似地，如果这名能力为（$x_1$，$x_2$）的考生选考科目2，由于选考科目2且能力低于该考生的考生总质量为$0.5x_2^2$（在图1(b) 中以浅灰色三角形表示），该考生的高考成绩为$\frac{0.5x_2^2}{0.5}=x_2^2$。显然，该考生有激励按照$x_1$和$x_2$的相对大小选择考试科目，结论1成立。

然而，上述纳什均衡并非这一博弈的唯一均衡。事实上，均衡下选考这两个学科的考生比例可以是任意的。即：假定选考科目1的人数占总人数的比例为$r\in(0,1)$，则对于任意的$r$，都存在一个纳什均衡，使得该均衡下选考科目1的学生比例为$r$。

**结论2** 对于任意$r\in(0,1)$，以下的策略组合构成一个纳什均衡：所有$x_1^{1/r}>x_2^{1/(1-r)}$的考生选择科目1，所有$x_1^{1/r}<x_2^{1/(1-r)}$的考生选择科目2，所有$x_1^{1/r}=x_2^{1/(1-r)}$的考生随机地从科目1和科目2中选一科。此时，选考科目1的学生人数比例为$r$。

证明：任意考虑一名考生，设其能力分位数为（$x_1$，$x_2$）。假设所有其他考生按照上述策略选择考试科目，则我们需要验证这名考生也有激励按照上述策略选择考试科目。此时，如图1(b) 所示，处于曲线上的考生（例如考生A）任意选择一科，处于曲线右下方的考生（例如考生B）选考科目1，处于曲线左上方的考生（例如考生C）选考科目2，且选择科目1的考生占全体考生的比例为$r=\int_0^1 t_1^{\frac{1-r}{r}}dt_1$。如果这名能力为（$x_1$，$x_2$）的考生选考科目1，由于选考科目1且能力低于该考生的考生总质量为$\int_0^{x1} t_1^{\frac{1-r}{r}}dt_1=rx_1^{1/r}$（在图1(b) 中以白色区域表示），因此该考生的高考成绩是其在科目1上的能力在所有选考科目1的考生中的分位数，即$\frac{rx_1^{\frac{1}{r}}}{r}=x_1^{1/r}$。类似地，如果这名能力为（$x_1$，$x_2$）的考生选考科目2，由于选考科目2且能力低于该考生的考生总质量为$\int_0^{x2} t_2^{\frac{r}{1-r}}dt_2=(1-r)x_2^{1/(1-r)}$（在图1(b) 中以浅灰色区域表示），该考生的高考成绩为$x_2^{1/(1-r)}$。因此，该考生同样有激励按照$x_1^{1/r}$和$x_2^{1/(1-r)}$的相对大小选择考试科目，即按照结论2中所述策略进行选考。

从上述例子可以看到，即使在最简单的情况下，这一博弈也具有无穷多个纳什均衡，其中任意的$r\in(0,1)$都对应着至少一个纳什均衡。在$r$接近0或者1时，均衡时选考其中一门科目的人数过少，博弈结果在政策制定者看来可能是不合意的。值得注意的是，我们的分析并不涉及不同考试科目的难度差别，因此降低科目难度有可能并无济于改善选考科目学生数量差异过大的问题。

那么选考科目保障机制是否可以有效避免选考某些科目的考生人数过少呢？考虑如下关于科目1的选考科目保障机制：教育部门制定科目1的保障比例为$\underline{r}$，当实际选考科

目比例$r<\underline{r}$时，则为科目1人为增加分数低于实考最低分的“虚拟”考生，使得选考科目1的考生比例增加至$\underline{r}$，因而相应提高所有选考科目1的学生的分位数。举例来说，假设实际选考科目1的比例为$r=0.4$，科目保障比例为$\underline{r}=0.5$，则选考科目保障机制将人为增加总质量为0.1的虚拟考生。原本在科目1上最低能力（分位数为0）的考生，若选考科目1，将领先所有虚拟考生，分位数为$0.1/0.5=0.2$。

由此可以证明，选考科目保障机制使得在纳什均衡下，实际选考科目1的学生比例不会低于科目1的保障比例$\underline{r}$。

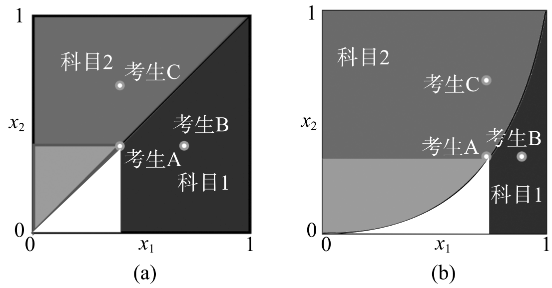


**图1　两科目选一时科目选考情况**

**结论3**　如果科目1实行了选考科目保障机制，则不存在选考科目1的学生比例低于保障比例的纳什均衡。

证明：考虑任意的使得选考科目1的学生比例低于保障比例$\underline{r}$的策略组合，我们只需说明该策略组合不是纳什均衡。此时，科目1的选考科目保障机制将人为增加科目1的虚拟考生。考虑一名选考科目2的考生，且其在科目2上的能力低于所有其他选考科目2的考生。此时，这名考生在科目2上的能力在所有选考科目2的考生中的分位数为0。如果，这名考生改为选考科目1，由于科目1中虚拟考生的存在，其将在科目1中取得大于0的分位数，因此其有激励改为选考科目1。这就验证了该策略组合不构成纳什均衡。

这一结论告诉我们，选考科目保障机制有效地缓解了选考某些科目的考生人数过少的问题。如果教育部门希望选考某一科目的比例不低于$\underline{r}$，只需将选考科目保障比例制定为$\underline{r}$。

## 三、理论分析

我们进入对模型的正式讨论。假设高考涉及$n$个选考科目，其集合记为$I=\{1,2,\cdots,n\}$。对于一位典型的考生，令$x_i\in[0,1]$为其在科目$i$上的能力。假设共有总质量为1的无穷多名考生，且考生的能力向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在考生群体中服从密度函数$c(x)$所描述的连续分布。

假设高考政策规定每位考生需要从$n$个科目中选择$m$个科目参加考试，考生在选考科目$i$上的成绩取决于该考生的能力$x_i$在所有选考科目$i$的考生的能力中的分位数，其高考总分为其$m$个选考科目成绩的加总。由于我们的分析侧重学生在高考前进行科目选考的博弈，因此我们假设考生在选考时的各科能力$x_i$是外生给定的。另外，我们假设学

生知道自己的各科能力$x_i$以及考生群体的能力分布。

每位考生需要选择的策略是选考一个含有 $m$ 个科目的科目组合，即一个含有 $m$ 个元素的 $I$ 的子集。所有可选的策略构成集合为 $S=\{s\in P(I) \mid |s|=m\}$，其中 $P(I)$是 $I$ 的幂集。全体考生的策略组合可以被描述为对$[0,1]^n$的一个划分 $P=\{P_s\}_{s\in S}$，其中$P_s$为所有选择科目组合 $s$ 的考生的向量构成的集合。在策略组合 $P=\{P_s\}_{s\in S}$下，一位能力向量为 $x\in P_s$的考生选考的科目集合为 $s$，其取得高考总分为 $\sum\limits_{i\in s}h(y_i)$，其中，

$$y_i := \frac{\sum_{s\in S:\, i\in s}\int_{z\in P_s:\, z_i\leqslant x_i} c(z)dz}{\sum_{s\in S:\, i\in s}\int_{z\in P_s} c(z)dz}, \tag{1}$$

$y_i$ 是该考生的能力$x_i$在所有选考科目 $i$ 的考生的能力$x_i$中的分位数，函数 $h$ 为政策所规定的从分位数到单科成绩的对应关系，且为严格单调递增的。

我们假设每位考生的目标是最大化自己的高考总分 $\sum_{i\in s}h(y_i)$ 的排名，在无穷个学生参与的给定的纳什均衡下等价于最大化高考总分。由于函数 $h$ 是严格单调递增的，因此不论 $h$ 的具体形式如何，每位考生的目标都是选择$y_i$最高的 $m$ 个科目参加考试。

在我们的模型中，有几处对现实的简化。首先，我们假设学生在选择选考科目时能够完全预测自己在所有科目的成绩。[①] 学生在选择科目时，可以参考学校老师的建议，观察学校上一届学生的考试情况，以及经历多次模拟考试，因此学生可以在一定程度上预测自己的分数，这一假设并不过于背离现实。我们关心的重点是考生选择科目的整体表现，而不是个体考生在不确定性下的决策。其次，我们假设学生只在意自己的分数高低，不在意选考科目的组成，在中国，学生更在意能上好大学，其次才考虑好的专业(杜宛忻宜和钟笑寒，2018)。最后，我们假设学生是连续的，这是为了技术上的便捷，有效避免“加总不确定性”(aggregate uncertainty)。事实上，每个省的考生人数都在几万至数十万，一个考生的偏离几乎不会对其他考生的排名产生影响，因此这一假设是可以接受的。

我们将关注该博弈的纳什均衡，其定义如下。

**定义1** 一个策略组合 $P=\{P_s\}_{s\in S}$被称为一个纳什均衡，如果对于任意 $s\in S$ 和 $x\in P_s$，我们从 $i\in s$ 和$i'\notin s$ 中可推出$y_i\geqslant y_{i'}$，其中$y_i$的定义由式(1)给出。

我们想知道的第一个问题是，在纳什均衡下，选择各个科目的学生人数比例是怎样的？在前面的两科目二选一的例子中，我们看到在纳什均衡下选考两个科目的学生人数比例可以非常不平衡。在一般的情况下，这一结论是否还成立？我们将会看到，在对学生分布的密度函数做出以下两个假设时，答案是肯定的。

**假设1(有界性)** 存在$\bar{c}>\underline{c}>0$使得对于任意 $x\in[0,1]^n$，都有 $c(x)\in[\underline{c},\bar{c}]$。

假设1要求考生在不同科目之间的分数分位数的分布既不过度稀疏，也不过度集中。在高考各省考生人数众多、擅长科目各不相同的现实背景下，这一假设是自然的。

**假设2(对称性)** 若$x_2$ 的各分量是关于$x_1$的各分量的重排列，则有 $c(x_2)=c(x_1)$。

假设2要求学生能力分位数分布的密度函数是对称的。这一假设囊括很大范围的密

① 关于填报志愿时考生是否知道成绩对录取结果的影响，可以参见 Wu and Zhong (2014)。

度函数情况，例如：

例 a：当考生各科之间的能力是相互独立的时候，$x_i \sim_{i.i.d} U[0,1]$，此时 $c(x)=1$，是对称的。

例 b：若考生某科 $i$ 的能力由两部分组成，考生的总体智力水平 $\theta$ 和对该科的擅长程度$\varepsilon_i$，其科目 $i$ 的绝对能力为$z_i=\theta+\varepsilon_i$，$\theta$ 和$\varepsilon_i$均服从正态分布，且（$\theta$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，…，$\varepsilon_n$）两两独立，此时 $c(x)$ 也是对称的。

该模型的每一个纳什均衡都被 $n$ 维能力空间中的一条从（0，0，…，0）到（1，1，…，1）的曲线确定，能力向量位于该曲线上的考生选考任意科目得到的高考分数都是相同的。记该曲线为 $X(x_1)=(x_1, X_2(x_1), X_3(x_1), \cdots, X_n(x_1))$，其中$X_2$，$X_3$，…，$X_n$为$[0,1]$上严格单调递增且可导的函数。为了叙述简便，我们记$X_1(x_1)\equiv x_1$。能力向量为 $x$ 的考生选考$X_i^{-1}(x_i)$ 最高的 $m$ 个科目。对于任意给定的选考比例$\{r_i\}$，如果可以找到上述曲线使得能力向量位于该曲线上的考生选考任意科目得到的高考分数都是相同的，且选择各科目的考生比例符合比例$\{r_i\}$，我们即找到了符合要求的纳什均衡。

我们将看到，该曲线是存在的，且可以被一组给定端点值的微分方程描述。如果点$X\in[0,1]^n$位于上述曲线上，则选考科目 $i$ 的考生人数的边际密度为：

$$f_i(X):=\int_{\substack{x_{-i}\in[0,1]^{n-1} \\ |\{i'\in I\setminus i\}:x_{i'}<X_{i'}\}|\geqslant n-m}} c(X_i, x_{-i})\,dx_{-i}. \tag{2}$$

不难验证，在假设 1 下，$f_i$为$[0,1]^n$上的连续函数。

均衡条件要求，当考生能力向量沿着曲线运动时，考生各科目的能力在选考该科目学生中的分位数须保持一致，且选考各科目的学生比例满足$r_i$。该条件可被下面的方程所描述：

$$\frac{f_i(X(x_1))X'_i(x_1)}{f_1(X(x_1))}=\frac{r_i}{r_1}.$$

因此，我们所求曲线即为微分方程初值问题

$$X'_i(x_1)=\frac{r_i f_1(X(x_1))}{r_1 f_i(X(x_1))}:=\varphi_i(x_1, X),\ X_i(1)=1 \tag{3}$$

所描述的曲线。

我们接下来说明，若假设 1 成立，则当考生选考一门科目，即 $m=1$ 时，对于任意正的科目选考人数比例组合，都存在纳什均衡，使得在纳什均衡下各科目选考人数比例恰等于该比例。

**定理 1**　在假设 1 下，若选考科目数 $m=1$，则对于任意正的科目选考人数比例组合 $r=(r_1, r_2, \cdots, r_n)$，其中 $\sum_{i=1}^{n} r_i=1$ 且$r_i>0(\forall i\in I)$，都存在至少一个对应的纳什均衡，使得在该均衡下，选考各科目的人数比例恰为 $r$。

定理 1 的证明思路简述如下[①]：

首先，我们证明，若存在函数 $X(x_1)$，其中各分量$X_i(x_1)$ 满足式（3）规定的微

① 完整定理证明可参见附录。限于篇幅，附录未在正文报告，感兴趣的读者可在《经济学》(季刊) 官网（https：//ceq. ccer. pku. edu. cn）下载。

分方程初值问题，且 $X(0)=0$，则该函数所确定的划分构成一个选考各科的考生比例为 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 的纳什均衡。

之后，我们证明，满足上述要求的函数 $X(x_1)$ 存在。定理 1 得证。

当选考科目数 $m>1$ 时，我们需要更强的假设才能证明服从某特定选考比例的均衡的存在性。原因是，当选考科目数 $m>1$ 时，不同策略之间的选考科目存在重叠。当选择某策略的学生比例趋于 0 时，该策略包含的某些科目的学生人数比例可能并未趋于 0，这与选考科目数 $m=1$ 时的情形不同。此时，式（3）规定的微分方程初值问题的解仍然存在，但可能会出现 $X(0)\neq 0$ 的情况，即该微分方程初值问题的解并不过原点。这导致该解所确定的划分不构成纳什均衡。

为此，在选考科目数 $m>1$ 时，我们额外引入了假设 2，密度函数的对称性假设简化了我们对多维微分方程的导数范围的分析。事实上，即使假设 1 和假设 2 都成立，也无法保证在任意正的科目选考人数比例组合下 $X(0)\neq 0$ 不再出现，我们在定理 2 的证明[①]中给出了反例。我们发现，在假设 1 和假设 2 下，且当选考某科目的人数比例较低时，可以保证 $X(0)=0$，从而保证了纳什均衡存在。

**定理 2** 在假设 1 和假设 2 下，若对于某一科目 $i\in I$ 我们有 $r_i\in\left(0, \frac{\underline{c}m}{\bar{c}(n-1)+\underline{c}}\right]$，则存在一个纳什均衡，其中选考该科目的人数比例恰为 $r_i$。

定理 2 的证明过程与定理 1 类似，我们仍然将问题刻画为微分方程初值问题（3）的解，并要求 $X(0)=0$。此时，我们发现，在假设 2 成立和科目 $i$ 选考比例满足 $r_i\leqslant \frac{\underline{c}m}{\bar{c}(n-1)+\underline{c}}$ 时，我们能够证明满足式（3）的函数 $X(x_1)$ 存在且 $X(0)=0$。

我们注意到，定理 2 给出的 $r_i\in\left(0, \frac{\underline{c}m}{\bar{c}(n-1)+\underline{c}}\right]$ 的条件可以充分保证均衡存在，但不必要。例如，当所有科目选考人数比例相同，即 $r_1=r_2=\cdots=r_n=\frac{m}{n}$ 时，也存在对应的纳什均衡，即所有考生的策略均为选择自身的 $x_i$ 最高的 $m$ 门科目。

定理 1 和定理 2 告诉我们，存在多重纳什均衡，其中一些均衡使得各个科目的选考比例极度不平衡，这也使得博弈参与者很难协调，导致均衡结果在实际中难以达到。然而，选考科目保障机制可以有效减少多重均衡，并缓解均衡下选考比例不平衡的问题。

选考科目保障机制的规则如下：对于每一个科目 $i\in I$，教育部门制定该科目的保障比例 $\underline{r}_i\in[0, 1]$，当该科目的实际选考人数比例 $r_i<\underline{r}_i$ 时，则在为该科目人为添加分数低于实考最低分的“虚拟”考生，使得选考该科目的考生比例增加至 $\underline{r}_i$。不失一般性地，我们假设 $\sum_{i=1}^{n}\underline{r}_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}r_i=m$，即所有科目的保障比例之和不超过所有考生的实际选考人数比例之和。此时，考生的能力 $x_i$ 在所有选考科目 $i$ 的考生的能力中的分位数如式（4）所示。

$$y_i:=1-\frac{\sum_{s\in S:\ i\in s}\int_{z\in P_s:\ z_i>x_i}c(z)\,dz}{\underline{r}_i}. \tag{4}$$

① 请见附录。

选考科目保障机制可同时对多门科目同时实施。正如结论 3 中的讨论，实施选考科目保障机制后，均衡下的选考科目人数比例不会低于保障比例。我们将这一发现总结为定理 3。

**定理 3**　在有选考科目保障机制时，任意纳什均衡下各科目的选考比例均满足保障比例。在没有选考科目保障机制时，若某一均衡中各科目选考比例均满足保障比例，则实施该选考科目保障比例后，该策略组合仍为均衡。

定理 3 的直觉与前文所述例子相同①。定理 3 告诉我们，选考科目保障机制可以有效地限制均衡范围和考生比例，且不必担心选考科目保障机制约束选考比例后会出现没有纳什均衡的情况。进一步我们有如下简单推论。

**结论 4**　若在没有选考科目保障机制时存在一个纳什均衡，其中选考各科目的考生人数比例组合为（$r_1$，$r_2$，…，$r_n$），则当选考科目保障比例定为$\underline{r}_i=r_i$，$\forall i\in I$，均衡下各科目的考生人数比例组合一定是（$r_1$，$r_2$，…，$r_n$）。

结论 4 告诉我们，教育部门可通过设计选考科目保障比例来固定住各科目的考试人数比例。然而，科目选考机制推行的初衷是赋予学生充分的自由选择权，制订比较宽松的保障比例可以更好地将学生个人发展、高校学科发展以及国家长远发展有机结合起来。正如江苏省教育厅在《关于深化高考综合改革相关政策的解读》所述，应“促进考生自主选科与国家人才需要和高校选拔要求更加匹配”。

## 四、福利分析

从前文的讨论中我们可以看到，新高考改革的科目选考机制中存在多重均衡的现象。一部分考生分数上升的同时，一定有另一部分考生的分数下降，因此，如果我们以考生高考总分的排名衡量考生的福利，则不同的纳什均衡之间不存在帕累托改进，我们将这一发现总结为如下结论。

**结论 5**　在科目选考机制下，所有纳什均衡都是帕累托有效的。

接下来我们考虑科目选考机制下的公平问题。有如下定义：

**定义 2**　一个机制是公平的，如果在该机制产生的任意均衡 $P$ 下，对于具有能力分位数向量$x^1$和$x^2$ 的任意两位考生，若$x^1$的各分量大于等于$x^2$ 的各分量，则$x^1$的高考分数大于等于$x^2$ 的高考分数。

公平的含义是，在任意给定的均衡下，各科能力都更强的学生，一定会有更高的高考分数。

**结论 6**　科目选考机制是公平的。

证明：在均衡 $P$ 下，对于任意科目 $j$，都有$x_j^1\geqslant x_j^2$，则由式（1）给出的$y_j$的定义知，$y_j^1\geqslant y_j^2$，即有 $h(y_j^1)\geqslant h(y_j^2)$，也即考生$x^1$在任意给定的选考科目上的分数都比考生$x^2$ 要高。又因为每位考生在均衡下都是选择$y_i$最高的 $m$ 个科目 $i$ 参加考试，因此若在均衡 $P$ 下，考生 $x^1$ 的策略为$s_1$，考生 $x^2$ 的策略为$s_2$，则有 $\sum_{i\in s_1}h(y_i^1)\geqslant\sum_{i\in s_2}h(y_i^1)\geqslant$

① 定理 3 的证明参见附录。

$\sum_{i\in s2}h(y_i^2)$。因此考生$x^1$的高考分数大于等于$x^2$的高考分数。

科目选考机制允许考生自主选择科目的一个出发点是尊重考生自身特长。我们有如下定义：

**定义3** 一个机制是尊重特长的，如果在该机制产生的任意均衡$P$下，对于具有能力分位数向量$x^1$和$x^2$的任意两位考生，若$x^1$能力分位数第$m$高的科目的能力分位数大于等于$x^2$的最高一科的能力分位数，则$x^1$的高考分数大于等于$x^2$的高考分数。

尊重特长的含义是，如果一名考生最擅长（按照在全体考生中的排名定义）的$m$门科目全都强于另外一名考生最擅长的科目，则该名考生的高考排名更高。这一定义相比于公平，更加强调考生在擅长科目的表现。

**结论7** 科目选考机制未必尊重特长。

证明：考虑与第二部分例子相同的环境，考生需要从科目1和科目2中选考一门，且（$x_1$，$x_2$）服从在正方形$[0,1]^2$上的均匀分布。此时尊重特长的定义为，若$x^1$的最高一科能力分位数大于等于$x^2$的最高一科的能力分位数，则$x^1$的高考分数大于等于$x^2$的高考分数。考虑均衡$P$为：对于考分为（$x_1$，$x_2$）的任意考生，若$x_2<(x_1)^2$，则选考科目1，所有$x_2\geqslant(x_1)^2$，则选考科目2。对于能力向量为$x^1=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{10}\right)$的考生来说，该考生在均衡下选考科目1，且高考分数（即在科目1上的排名分位数）为$\frac{1}{27}$，而对于能力向量为$x^2=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$的考生来说，该考生在均衡下选考科目2，虽然$\max\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)<\max\left(\frac{1}{3},\frac{1}{10}\right)$，但其高考分数（科目2上的排名分位数）为$\frac{1}{8}>\frac{1}{27}$，这违反了我们对尊重特长的定义。

最后，我们设想一个反事实的情况，假设一名考生不满意高考情况，决定复读并第二次参与高考，在复读的一年中该考生的所有能力都进步了，该考生的第二次的高考分数一定会比第一次高吗？我们给出如下定义：

**定义4** 一个机制是尊重改进的，如果对于该机制产生的任意均衡$P^1$和$P^2$及具有能力分位数向量$x^1$和$x^2$的任意两位考生，若$x^1$的各分量大于等于$x^2$的各分量，则$x^1$在均衡$P^1$下的高考排名大于等于$x^2$在均衡$P^2$下的高考排名。

尊重改进意味着，各科能力都更强的学生，在任意均衡下得到的最差的高考排名，也比能力更弱的学生在任意均衡下得到的最好的高考排名要高。① 不难发现，若一个机制是尊重改进的，则它一定是公平的。反之则不然。

**结论8** 科目选考机制未必尊重改进。

证明：仍然考虑与第二部分例子相同的环境（即"二选一"）。均衡$P^1$为所有$x_2<(x_1)^{\frac{1}{2}}$的考生选考科目1，所有$x_2\geqslant(x_1)^{\frac{1}{2}}$的考生选考科目2；均衡$P^2$为所有$x_2<(x_1)^2$

① 定义4比较的是在不同均衡下的两个能力分位数向量的高考排名，此时高考排名与高考分数可能并不等价。也就是说，存在一种可能，在一个均衡下的更高的高考分数对应的高考排名比在另一个均衡下更低的高考分数下对应的排名更低。不过，当选考科目数$m=1$时，高考分数仍然等价于高考排名。

的考生选考科目 1，所有 $x_2 \geqslant (x_1)^2$ 的考生选考科目 2。对于能力向量为 $x^1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$ 的考生来说，该考生在均衡 $P^1$ 下选考科目 2，且排名的分位数为 $\left(\frac{5}{8}\right)^3$；而对于能力向量为 $x^2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) < x^1$ 的考生来说，该考生在均衡 $P^2$ 下选考科目 2，且排名的分位数为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{5}{8}\right)^3$，这违反了我们对尊重改进的定义。

从上述例子中，可以发现，即使两个考生在两个不同的均衡下选考科目完全相同，能力更强的考生在一个均衡下的高考排名也不一定比另一考生在另一均衡下的高考排名更高。

综合结论 7 和结论 8 可以看到，造成科目选考机制不尊重特长和不尊重改进的原因都是多重均衡：由于选考人数比例在相当范围内都可构成均衡，这会造成考生选考某科目的排名分位数变动过大。一些考生家长“考得好不如选得好”的担忧是有道理的。科目选考机制设计的初衷是尊重特长、尊重改进的，但如果不加以干预这一目标较难达成。

选考科目保障机制缩小了均衡的范围、减少了多重均衡的数量，这会使得考生的最终分数波动范围减小，使得与不加任何干预相比，科目选考机制更倾向于尊重特长、尊重改进，最终促进更广泛意义上的公平。

## 五、结　　论

2021 年，又有七个省份宣布启动新高考改革，经过七年四轮的努力，至此，全国已有 21 个省市区实行了新高考改革，其余省市区也将在近几年推动改革。本文研究了新高考改革中最重要的一项改革举措——高考科目选考制度。我们的理论结果表明，如果不加以限制，科目选考人数比例差异过大会成为均衡状态。如果科目间选考考生比例差异过大，可能会导致学生报考与高校学科资源的极不匹配，对于学科均衡发展和国家长远战略都是不利的。为了纠正可能存在的学生比例差异过大问题，目前部分省份推出了选考科目保障制度。我们的分析表明，这一制度可能是合意的，可以消除选考人数比例极不平衡的均衡结果。

我们的理论分析隐含了选考科目保障机制在均衡状态下并不会真正实施。虽然江苏省在 2021 年高考中触发了化学的选考科目保障制度，但这很有可能是考生已经选完科目后才公布了选考科目保障制度导致的。如果观察同样施行了选考科目保障制度的浙江省和上海市，会发现物理科目选择比例保持在较高水平，保障制度没有被触发。

我们发现，在科目选考机制中，能力更强的考生的高考分数更高，说明科目选考机制是公平的。但是特长科目更强的考生并不一定分数更高。除此之外，在跨均衡比较时，能力更强的考生也不能保证分数更高。后两者是由于多重均衡造成选考人数比例与单科排名分位数波动过大导致的。由于选考科目保障机制有效约束了多重均衡的范围，因此可以使得科目选考机制更加尊重特长和尊重公平。但该政策目前仍只在部分省市得到施行，我们建议其他省市可考虑推广该政策。

## 参 考 文 献


[1] Chen, Y., and O. Kesten, "Chinese College Admissions and School Choice Reforms: A Theoretical Analysis", *Journal of Political Economy*, 2017, 125 (1), 99-139.

[2] 杜宛忻宜、钟笑寒，"选大学、选专业还是选地方：基于匹配理论分析学生对高校的偏好"，《经济学报》，2018 年第 6 期，第 187—211 页。

[3] 冯成火，"新高考物理'遇冷'现象探究——基于浙江省高考改革试点的实践与思考"，《中国高教研究》，2018 年第 10 期，第 25—30 页。

[4] Ha, W., L. Kang, and Y. Song, "College Matching Mechanisms and Matching Stability: Evidence from a Natural Experiment in China", *Journal of Economic Behavior & Organization*, 2020, 175, 206-226.

[5] 李小龙、谭静、徐升艳，"高考招生制度改革的路径：竞争和配额的折衷"，《经济研究》，2014 年第 2 期，第 155—170 页。

[6] Lien, J. W., J. Zheng, and X. Zhong, "Preference Submission Timing in School Choice Matching: Testing Fairness and Efficiency in the Laboratory", *Experimental Economics*, 2016, 19 (1), 116-150.

[7] 刘海峰，"高考改革新方案的顶层设计与实践推进"，《中国教育学刊》，2019 年第 6 期，第 1—5 页。

[8] Royden, H. L., and P. Fitzpatrick, *Real Analysis*. New York: Macmillan, 1988.

[9] Teschl, G., *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2012.

[10] 魏立佳，"中国高考录取与博士生录取的机制设计"，《经济学》(季刊)，2009 年第 9 卷第 1 期，第 349—362 页。

[11] 文东茅、鲍旭明、傅攸，"等级赋分对高考区分度的影响——对浙江'九校联考'数据的模拟分析"，《中国高教研究》，2015 年第 6 期，第 17—21 页。

[12] 温忠麟、罗冠中，"高考'3＋X'分数转换和总分合成方法"，《考试研究》，2006 年第 3 期，第 41—52 页。

[13] 温忠麟，"高考选考科目定级计分和校准的若干问题"，《华东师范大学学报（教育科学版）》，2020 年第 6 期，第 34—42 页。

[14] Wu, B., and X. Zhong, "Matching Mechanisms and Matching Quality: Evidence from a Top University in China", *Games and Economic Behavior*, 2014, 84, 196-215.


# Subject Selection Mechanism in Chinese College Entrance Exam

## —A Game-Theoretical Study


SHENG Dalin

(Southwestern University of Finance and Economics)

WU Xingye ZHONG Xiaohan*

(Tsinghua University)



**Abstract**: The new college entrance examination (NCEE) reform allows students to freely choose examination subjects, but strategic subject selection by students in pursuit of high scores may also lead to



* Corresponding Author: Zhong Xiaohan, School of Economics and Management, Tsinghua University, Haidian District, Beijing 100871, China; Tel: 86-10-62772540; E-mail: zhongxh@sem.tsinghua.edu.cn.

unintended policy consequences. We investigate the Nash equilibrium under the new subject selection mechanism and show that there are multiple Nash equilibria in the mechanism, some of which lead to excessively low proportion of students taking some subjects, while the subject selection guarantee mechanism can effectively mitigate this problem.

**Keywords**: matching; NCEE reform; subject selection mechanism

**JEL Classification**: C72, D78, I28